8 Souřadnice vektoru vzhledem k bázi

Dle věty 4 lze vektor $\vec{u} \in V$ psát jediným způsobem jako lineární kombinaci vektorů dané báze $M = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ vektorového prostoru V. Jinak řečeno, koeficienty $x_1, x_2, ..., x_n \in T$ lineární kombinace

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{u}_i$$

jsou pro daný vektor $\vec{u}$ a danou bázi $M = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ určeny jednoznačně. Tyto koeficienty, respektive jejich vektor, nazýváme souřadnice vektoru $\vec{u}$ vzhledem k bázi M.

DEFINICE 12. *Nechť $M = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ je báze vektorového prostoru V. Potom každý vektor $\vec{u} \in V$ lze napsat jednoznačně ve tvaru*

$$\vec{u} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + ... + x_n\vec{u}_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{u}_i.$$

Vektor $(x_1, x_2, ..., x_n) \in T^n$ nazveme souřadnicemi vektoru $\vec{u}$ vzhledem k bázi M a značíme

$$\{\vec{u}\}_M = (x_1, x_2, ..., x_n).$$

Příklad: Množina $M = \{(1,1), (2,3)\}$ je bází vektorového prostoru R^2. Potom pro vektor $\vec{u} = (7, 12) \in R^2$ platí

$$\vec{u} = -3(1,1) + 5(2,3).$$

Tedy souřadnice vektoru $\vec{u} = (7, 12)$ vzhledem k bázi M jsou $(-3, 5)$. Píšeme takto:

$$\{\vec{u}\}_M = (-3, 5).$$

Poznámka: Nabízí se otázka, vzhledem k jaké bázi jsou uvažovány ostatní souřadnice vektorů z uvedeného příkladu. Jedná se o tzv. **kanonickou bázi**.

V případě vektorového prostoru R^2 je kanonickou bází množina

$$\{(1,0),(0,1)\}.$$

Pro R^3 je potom kanonickou bází množina vektorů

$$\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

atd.

ÚKOL: Ověřte, že vektory

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

tvoří bázi vektorového prostoru R^4. Potom určete souřadnice vektoru

$$\vec{x} = (4,-2,1,5)^T$$

vzhledem k této bázi.

Poznámka: Přiřazení souřadnic vektoru vzhledem k dané bázi je příkladem **izomorfismu**, tj. lineárního zobrazení, které je vzájemně jednoznačné.

Věta 16. *Nechť M je báze vektorového prostoru V. Potom zobrazení*

$$f : V \mapsto T^n$$

definované vztahem

$$f(\vec{u}) = \{\vec{u}\}_M$$

je **izomorfismus***.*