7 Steinitzova věta o výměně

Tato věta je pro nás důležitá hlavně svými důsledky. Plynou z ní například tyto skutečnosti:

Dvě báze téhož vektorového prostoru mají stejný počet prvků.

Ve vektorovém prostoru nemůže být více lineárně nezávislých vektorů, než je počet vektorů jeho báze.

Příklad: Množina M je systémem generátorů příslušného vektorového prostoru. Je možné nahradit některé vektory z M vektory z množiny N tak, aby výsledná množina opět generovala ten samý vektorový prostor?

a) $M = \{(1,2),(0,2),(1,1)\},\ N = \{(1,0)\}$,

b) $M = \{(1,1,1),(2,1,3),(0,2,4),(1,0,1)\},\ N = \{(1,0,0),(0,1,1)\}$,

c) $M = \{(1,1,1),(2,1,3),(0,2,4),(1,0,1)\},\ N = \{(0,1,2),(2,0,2)\}$.

Věta 10 (Steinitzova věta o výměně). *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. Nechť $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ je* **množina generátorů** *prostoru V a nechť $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k$ jsou* **libovolné lineárně nezávislé vektory** *z V. Potom platí:*

1) $k \leq n$,

2) *při* **vhodném přečíslování** *vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n$ mohu prvních k z nich nahradit vektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k$ tak, že množina $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k, \vec{u}_{k+1}, \vec{u}_{k+2}, ..., \vec{u}_n\}$ je* **systémem generátorů** *vektorového prostoru V.*

7.1 Důsledky Steinitzovy věty o výměně

Věta 11. Každé dvě báze *konečně generovaného vektorového prostoru V* **mají týž počet prvků**.

Věta 12. *Každá* **skupina lineárně nezávislých vektorů** *libovolného vektorového prostoru* **generovaného** $n-$**prvkovou množinou** *obsahuje* **nejvýše** n **vektorů**.

Věta 13. *Je-li* $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ **báze vektorového prostoru** V *a jsou-li vektory* $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n \in V$ **lineárně nezávislé**, *je množina* $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ **rovněž báze** *vektorového prostoru V.*

Věta 14. *Nechť* $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ *je* **množina generátorů** *vektorového prostoru* V, *pak*

$$\dim V \leq n.$$

Věta 15. *Nechť* V *je vektorový prostor dimenze* $n > 0$ *(*$\dim V = n > 0$*), pak jsou následující podmínky ekvivalentní:*

1. *vektory* $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n \in V$ *jsou* **lineárně nezávislé**,

2. *vektory* $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n \in V$ **generují** *prostor* V,

3. *vektory* $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n \in V$ **tvoří bázi** *prostoru* V,