Lineární zobrazení - Homomorfismus.

Příklad 1: U daného homomorfismu určete matici A zobrazení f, $\mathrm{Ker} f$, $\mathrm{Im} f$, $\dim(\mathrm{Ker} f)$, $\dim(\mathrm{Im} f)$ a rozhodněte, zda se jedná o mono-, epi- či izomorfismus:

a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $f((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 - x_3, x_1 - x_2 - 2x_3)$,

b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $f((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 - x_2, x_2 + x_3, x_1 - x_3)$,

c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $f((x_1, x_2, x_3)) = (x_1, 2x_2 - x_3, 2x_1, x_1 - 4x_2 + 2x_3)$,

d) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $f((x_1, x_2, x_3)) = (x_1, x_2 - x_3, 2x_1, 3x_1 - x_2 + x_3)$,

e) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $f(x_1, x_2, x_3) = (-8x_1 - 13x_2 + 22x_3, -4x_1 + x_2 + 8x_3, -x_2 + 6x_3, 7x_2)$.

Příklad 2: U homomorfismu $f : R^3 \to R^4$, který je zadán body $f((1, 1, 2)) = (3, 3, 6, 0)$, $f((1, 0, 1)) = (2, 1, 3, 1)$ a $f((-1, 1, 1)) = (0, 2, 2, -2)$ určete jádro, obraz a jejich dimenze. Potom rozhodněte, zda je homomorfismus f také epi-, mono- či izomorfismem. Nakonec určete $f((3, 1, -2))$.

Příklad 3: U homomorfismu $f : R^3 \to R^4$, který je zadán body $f((1, 2, 0)) = (4, 4, 2, 2)$, $f((1, 1, 1)) = (3, 6, 2, 0)$ a $f((0, 1, 2)) = (1, 4, -3, -1)$, určete jádro, obraz a jejich dimenze. Potom rozhodněte, zda je homomorfismus f také epi-, mono- či izomorfismem. Nakonec určete $f((1, 1, -2))$.

Příklad 4: Pro homomorfismus $h : R^3 \mapsto R^4$ platí: $h(1, 1, 2) = (5, 7, 3, -1)$, $h(1, 0, 1) = (2, 2, 2, 2)$, $h(0, -1, 1) = (-1, -1, -1, -1)$. Určete jeho předpis, jádro, obraz, dimenze jádra a obrazu a rozhodněte, zda je zobrazení prosté (injekce), na množinu (surjekce) či vzájemně jednoznačné (injekce).