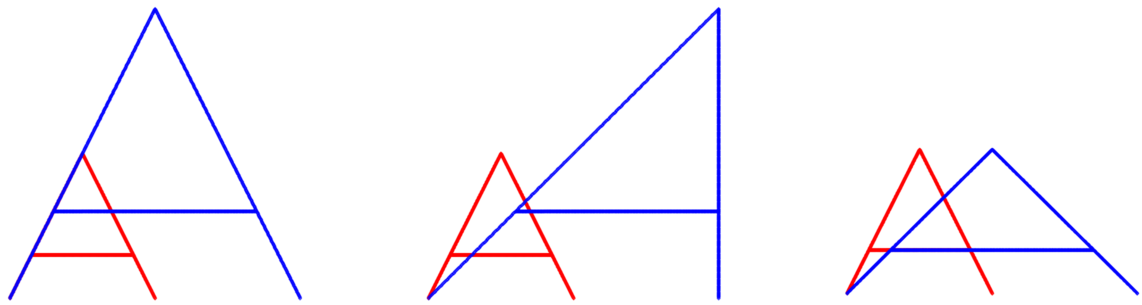
5 Lineární zobrazení (homomorfismus)

Příkladem lineárního zobrazení (též používáme označení *homomorfismus* nebo *lineární transformace*), se kterým jsme se nedávno setkali, je **přiřazení souřadnic vektoru**. Dalšími, názornějšími, příklady lineárního zobrazení jsou **lineární transformace vektorového prostoru do sebe nebo do jiného vektorového prostoru**.

Lineární zobrazení vektorového prostoru V_2 do vektorového prostoru V_2

Příklad: Každou ze znázorněných transformací I, II a III ztotožněte s odpovídající maticovou rovnicí a, b nebo c.



I II III

a) $\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

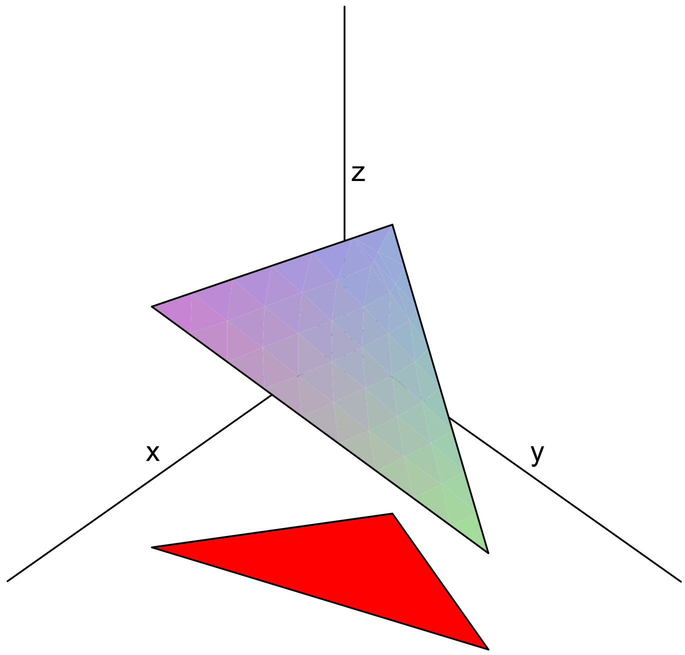
b) $\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

Poznámka: Vektorové prostory V (prostor vzorů) a V' (prostor obrazů) mohou mít **rozdílné dimenze**.

Lineární zobrazení vektorového prostoru V_3 do vektorového prostoru V_2

Příklad: Na obrázku 1 je znázorněn průmět trojúhelníku z prostoru dimenze 3 do prostoru dimenze 2 (odpovídá souřadnicové rovině (x,y)). Najděte algebraické vyjádření této transformace ve formě maticové rovnice $X' = AX$, kde A je matice této transformace, $X \in V_3$ a $X' \in V_2$.



Obrázek 1: Průmět trojúhelníku do roviny

Obecně můžeme každé lineární zobrazení zadat rovnicí ve tvaru

$$\vec{u}' = A\vec{u}, \tag{10}$$

kde A je **matice lineární transformace (matice homomorfismu)**, $\vec{u} \in V$ a $\vec{u}' \in V'$ (vektory $\vec{u}$, $\vec{u}'$ v rovnici (10) uvažujeme ve sloupcovém tvaru). Přitom vektorové prostory V, V' mohou mít rozdílné dimenze (matice A v takovém případě není čtvercová).

Vlastnosti zkoumaných zobrazení:

1) $A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v}; \quad u, v \in V,$

2) $A(r\vec{u}) = rA\vec{u}; \quad u \in V, r \in T.$

Definice 13 (Lineární zobrazení (homomorfismus))**.** *Nechť V a V' jsou vektorové prostory nad stejným tělesem T. Zobrazení $f : V \mapsto V'$ se nazývá* **homomorfismus** *(též* **lineární zobrazení***), jestliže pro všechna $\vec{u}, \vec{v} \in V$, $r \in T$ platí:*

$$1)\ f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v}),$$

$$2)\ f(r\vec{u}) = rf(\vec{u}).$$

Zadání lineárního zobrazení

Lineární zobrazení můžeme zadat dvojím způsobem:

$$\textbf{maticí: } A\vec{u} = \vec{u}' \qquad \text{nebo} \qquad \textbf{předpisem: } f(\vec{u}) = \vec{u}'.$$

Příklad:

Maticové vyjádření : $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ 2x_2 \end{bmatrix}$

Vyjádření předpisem : $f(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, 2x_2)$

ÚKOL: Rozhodněte, zda jsou daná zobrazení homomorfismy:

a) $f : R^2 \mapsto R^3;\ f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, x_1 + x_2, x_1 + 3x_2)$,

b) $f : R^2 \mapsto R^2;\ f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_2 + 5)$.

5.1 Obraz a jádro homomorfismu

Každé rovnosti $A\vec{u} = \vec{u}'$, kde $\vec{u} \in V$ a $\vec{u}' \in V'$, odpovídá lineární zobrazení $f(\vec{u}) = \vec{u}'$ a naopak, každé lineární zobrazení $f(\vec{u})$ lze vyjádřit ve tvaru $A\vec{u} = \vec{u}'$, kde A je příslušná transformační matice. Potom je zřejmé, že **vlastnosti lineárních zobrazení můžeme studovat na vlastnostech příslušných transformačních matic** A.

Obraz (oblast obrazů) homomorfismu $\mathrm{Im} f$

$$\mathrm{Im} f = \{f(\vec{u}); \vec{u} \in V\}$$

Příklad: $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\mathrm{Im} f$ je **množina všech lineárních kombinací (tj. lineární obal) sloupcových vektorů transformační matice** A. Uvažujme transformační matici

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

se sloupcovými vektory

$$\vec{v}_1 = (a_{11}, a_{21}, ..., a_{m1}), \vec{v}_2 = (a_{12}, a_{22}, ..., a_{m2}), ..., \vec{v}_n = (a_{1n}, a_{2n}, ..., a_{mn}).$$

Potom

$$\mathrm{Im} f = [\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\}].$$

Přitom platí, že $\mathrm{Im} f$ je podprostorem vektorového prostoru V' (tj. prostoru obrazů):

$$\mathrm{Im} f \subseteq\subseteq V'.$$

Jádro homomorfismu $\mathrm{Ker} f$

$$\mathrm{Ker} f = \{\vec{u} \in V;\ f(\vec{u}) = \vec{o}\}$$

Příklad: $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\mathrm{Ker} f$ je **množina všech vektorů z** V, **které jsou lineárním zobrazením vynulovány**. Je to tedy množina všech řešení homogenní soustavy

$$A\vec{u} = \vec{o}.$$

Platí, že $\mathrm{Ker} f$ je podprostorem vektorového prostoru V (tj. prostoru vzorů):

$$\mathrm{Ker} f \subseteq\subseteq V.$$

5.2 Dimenze obrazu a jádra homomorfismu

Příklad: $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,

$\dim(\mathrm{Im} f) = 2, \quad \dim(\mathrm{Ker} f) = 1, \quad \dim(V) = 3.$

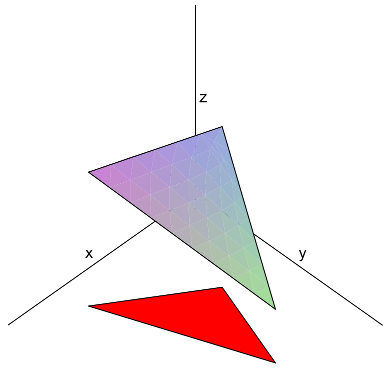
Obecně platí:

$$\dim(\mathrm{Im} f) + \dim(\mathrm{Ker} f) = \dim(V), \tag{11}$$

tj. můžeme psát:

$$\dim(\mathrm{Im} f) = \dim(V) - \dim(\mathrm{Ker} f).$$

Příklad: Průmět trojúhelníku z prostoru dimenze 3 do prostoru dimenze 2 (konkrétně do roviny (x, y)) - viz obrázek 2.



Obrázek 2: Průmět trojúhelníku do roviny

Transformační matice má tvar $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Potom $\dim(\mathrm{Im} f) = 2$, $\dim(V) = 3$ a na dimenzi jádra homomorfismu zbývá podle rovnice (11) hodnota $\dim(\mathrm{Ker} f) = 1$. To odpovídá jednomu rozměru (ve směru osy z), který se promítnutím ztratil. Proto se dimenzi jádra homomorfismu říká také **defekt homomorfismu**.

5.3 Základní úlohy na určení homomorfismu

Úloha 1: Zjistěte, zda je daným předpisem určen homomorfismus. Pokud ano, určete jeho jádro a obraz.

a) $f(x_1, x_2) = (5x_1 + x_2, -x_2, 2x_1 - 6x_2)$,

b) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 + x_3, x_3 - x_1)$,

c) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (5x_2 - x_3, x_3 + 2, 2x_1)$.

Úloha 2: Najděte homomorfismus $f : R^3 \mapsto R^2$, pro který platí následující vztahy. Potom určete jeho obraz a jádro:

$$f(1, 1, 3) = (1, -1), \qquad f(0, 1, 1) = (2, 0), \qquad f(1, 0, 1) = (1, 2).$$

5.4 Další vlastnosti homomorfismu

Nutná podmínka homomorfismu

$$f(\vec{o}) = \vec{o} \tag{12}$$

Monomorfismus (prosté lineární zobrazení)

$$f \text{ je monomorfismus} \Leftrightarrow \mathrm{Ker} f = \{\vec{o}\} \tag{13}$$

Epimorfismus (lineární zobrazení na množinu)

$$f \text{ je epimorfismus} \Leftrightarrow \mathrm{Im} f = V' \tag{14}$$

Izomorfismus (vzájemně jednoznačné lineární zobrazení)

$$f \text{ je izomorfismus} \Leftrightarrow \mathrm{Ker} f = \{\vec{o}\} \wedge \mathrm{Im} f = V' \tag{15}$$

ÚKOL: U homomorfismů z úloh 1 a 2 v kapitole 5.3 rozhodněte, zda se jedná o izo-, epi- či monomorfismus, případně jenom o homomorfismus.

5.5 Báze a homomorfismus

Zajímá nás, jaké vlastnosti musí mít homomorfismus, aby se jím báze vektorového prostoru V zobrazila opět na bázi vektorového prostoru V'. Tyto vlastnosti jsou postupně specifikovány následující sérií vět.

Věta 20 (Množina generátorů a homomorfismus)**.** *Nechť V, V' jsou vektorové prostory nad tělesem T, $f : V \mapsto V'$ je homomorfismus. Jestliže M je množina generátorů prostoru V, potom $f(M)$ je množina generátorů prostoru* $\mathrm{Im} f$.

Věta 21 (Lineární závislost a monomorfismus)**.** *Nechť V, V' jsou vektorové prostory nad tělesem T, zobrazení $f : V \mapsto V'$ je monomorfismus. Potom, jsou-li vektory $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$, $\vec{u}_i \in V$, lineárně nezávislé (závislé), jsou také vektory $\{f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2), ..., f(\vec{u}_n)\}$ lineárně nezávislé (závislé).*

Věta 22 (Báze a izomorfismus)**.** *Nechť V, V' jsou vektorové prostory nad tělesem T, zobrazení $f : V \mapsto V'$ je izomorfismus. Pokud M je báze V, pak $f(M)$ je báze V'.*

5.6 Izomorfní vektorové prostory

Navzájem ekvivalentní vektorové prostory.

Příklad: Vektorové prostory P_n a R^{n+1}.

Význam izomorfismu vektorových prostorů spočívá v tom, že studium všech vektorových prostorů s konečnou dimenzí můžeme převést na studium s nimi izomorfních **aritmetických vektorových prostorů**.

Přiřazení souřadnic vektoru vzhledem k bázi je **izomorfismus**:

Věta 23. *Nechť M je báze vektorového prostoru V. Potom zobrazení $f : V \mapsto T^n$ definované vztahem $f(\vec{u}) = \{\vec{u}\}_M$ je izomorfismus.*

Věta 24. *Dva vektorové prostory V, V' jsou izomorfní právě tehdy, když mají stejnou dimenzi.*