9.3 Základní úlohy na určení homomorfismu

Úloha 1: Zjistěte, zda je daným předpisem určen homomorfismus. Pokud ano, určete jeho jádro a obraz.

a) $f(x_1, x_2) = (5x_1 + x_2, -x_2, 2x_1 - 6x_2)$,

b) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 + x_3, x_3 - x_1)$,

c) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (5x_2 - x_3, x_3 + 2, 2x_1)$.

Úloha 2: Najděte homomorfismus $f : R^3 \mapsto R^2$, pro který platí následující vztahy. Potom určete jeho obraz a jádro:

$$f(1,1,3) = (1,-1), \qquad f(0,1,1) = (2,0), \qquad f(1,0,1) = (1,2).$$

9.4 Další vlastnosti homomorfismu

Nutná podmínka homomorfismu

$$f(\vec{o}) = \vec{o} \tag{3}$$

Monomorfismus (prosté lineární zobrazení)

$$f \text{ je monomorfismus} \Leftrightarrow \text{Ker} f = \vec{o} \tag{4}$$

Epimorfismus (lineární zobrazení na množinu)

$$f \text{ je epimorfismus} \Leftrightarrow \text{Im} f = V' \tag{5}$$

Izomorfismus (vzájemně jednoznačné lineární zobrazení)

$$f \text{ je izomorfismus} \Leftrightarrow \text{Ker} f = \vec{o} \wedge \text{Im} f = V' \tag{6}$$

ÚKOL: U homomorfismů z úloh 1 a 2 v kapitole 9.3 rozhodněte, zda se jedná o izo-, epi- či monomorfismus, případně jenom o homomorfismus.

9.5 Báze a homomorfismus

Zajímá nás, jaké vlastnosti musí mít homomorfismus, aby se jím báze vektorového prostoru V zobrazila opět na bázi vektorového prostoru V'. Tyto vlastnosti jsou postupně specifikovány následující sérií vět.

Věta 17 (Množina generátorů a homomorfismus). *Nechť V, V' jsou vektorové prostory nad tělesem T, $f : V \mapsto V'$ je homomorfismus. Jestliže M je množina generátorů prostoru V, potom $f(M)$ je množina generátorů prostoru* $\mathrm{Im} f$.

Věta 18 (Lineární závislost a monomorfismus). *Nechť V, V' jsou vektorové prostory nad tělesem T, zobrazení $f : V \mapsto V'$ je monomorfismus. Potom, jsou-li vektory $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$, $\vec{u}_i \in V$, lineárně nezávislé (závislé), jsou také vektory $\{f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2), ..., f(\vec{u}_n)\}$ lineárně nezávislé (závislé).*

Věta 19 (Báze a izomorfismus). *Nechť V, V' jsou vektorové prostory nad tělesem T, zobrazení $f : V \mapsto V'$ je izomorfismus. Pokud M je báze V, pak $f(M)$ je báze V'.*

9.6 Izomorfní vektorové prostory

Navzájem ekvivalentní vektorové prostory.

Příklad: Vektorové prostory P_n a R^{n+1}.

Význam izomorfismu vektorových prostorů spočívá v tom, že studium všech vektorových prostorů s konečnou dimenzí můžeme převést na studium s nimi izomorfních **aritmetických vektorových prostorů**.

Přiřazení souřadnic vektoru vzhledem k bázi je **izomorfismus**:

Věta 20. *Nechť M je báze vektorového prostoru V. Potom zobrazení $f : V \mapsto T^n$ definované vztahem $f(\vec{u}) = \{\vec{u}\}_M$ je izomorfismus.*

Věta 21. *Dva vektorové prostory V, V' jsou izomorfní právě tehdy, když mají stejnou dimenzi.*

9.7 Další úlohy na homomorfismus

Úloha 3: Homomorfismus je dán předpisem

$$f(x_1, x_2, x_3) = (-8x_1 - 13x_2 + 22x_3, -4x_1 + x_2 + 8x_3, -x_2 + 6x_3, 7x_2).$$

Určete: matici A zobrazení f, Ker$f$, Imf, dim(Ker$f$), dim(Imf) a rozhodněte, zda se jedná o mono-, epi- či izomorfismus.

Úloha 4: Pro homomorfismus $h : R^3 \mapsto R^4$ platí: $h(1,1,2) = (5,7,3,-1)$, $h(1,0,1) = (2,2,2,2)$, $h(0,-1,1) = (-1,-1,-1,-1)$. Určete jeho předpis, jádro, obraz, dimenze jádra a obrazu a rozhodněte, zda je zobrazení prosté (injekce), na množinu (surjekce) či vzájemně jednoznačné (injekce).