

## 6 Skalární součin

Skalární součin dovoluje zavedení **metriky** v afinním bodovém prostoru, tj. umožňuje nám určovat vzdálenosti, odchylky, obsahy a objemy.

**Příklad:** Určete odchylku přímek  $p, q$  :

$$p : x = 1 + 3t, y = 1 + t, z = 1 + 2t; t \in R,$$

$$q : x = 2s, y = 3 + 9s, z = -1 + 6s; s \in R.$$

**Poznámka.** Použili jsme tzv. **Eukleidovský skalární součin**. Pro vektory  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$  je dán vztahem:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

**Úkol:** Pokuste se odhalit nějaké vlastnosti této operace.

**Definice 14** (Skalární součin). *Skalárním součinem rozumíme operaci, která každé dvojici vektorů  $\vec{u}, \vec{v} \in V$  přiřazuje reálné číslo (skalár)  $\vec{u} \cdot \vec{v} \in R$  tak, že platí:*

1.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ , (SYMETRIE)
2.  $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ , (BILINEARITA, vlastnosti 2 a 3)
3.  $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$ ,
4.  $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0 \wedge [\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{o}]$ . (POZITIVITA)

Skalární součin je vždy definován na nějakém vektorovém prostoru  $V$ . Potom hovoříme o **vektorovém prostoru se skalárním součinem**, nebo stručněji o **unitárním prostoru**.

(Pech:AGLÚ/str. 85 - D.1.1)

**Poznámka.** Skalární součin  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  bývá často zapisován ve tvaru  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$  nebo  $[\vec{u}, \vec{v}]$ .

## 6.1 Příklady skalárních součinů

Existují různé skalární součiny. Za skalární součin považujeme každou operaci, která splňuje definici 14. Uvedme si zde několik příkladů:

### 1. Eukleidovský skalární součin

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2; \quad \text{pro } \vec{u}, \vec{v} \in V_2$$

### 2. Vážený skalární součin

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2u_1v_1 + 5u_2v_2; \quad \text{pro } \vec{u}, \vec{v} \in V_2,$$

obecně

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^n c_i u_i v_i,$$

kde  $c_i$  je **váha** součinu  $i$ -tých souřadnic.

### 3. Skalární součin bez jména

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 - u_1v_2 - u_2v_1 + 4u_2v_2$$

### 4. Skalární součin v prostoru spojitých reálných funkcí na uzavřeném intervalu $\langle a; b \rangle$ :

$$f(x) \cdot g(x) = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

**Příklad:** Ověřte, že operace definovaná předpisem  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2u_1v_1 + 5u_2v_2$  je skutečně skalárním součinem.

## 6.2 Norma (velikost) vektoru

Ke každému skalárnímu součinu je následující definicí zavedena norma vektoru.

**Definice 15.** Normou (velikostí) vektoru  $\vec{u} \in V$  rozumíme číslo

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}.$$

(Pech:AGLÚ/str. 88 - D.1.2)

**Poznámky.**

1. Používáme též označení  $\|\vec{u}\|$ .
2. Vektor s normou  $|\vec{u}| = 1$  nazýváme **jednotkový vektor**.
3. Součin  $\vec{u} \cdot \vec{u}$  zkracujeme na  $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2$ . Potom je zřejmé, že platí

$$\vec{u}^2 = |\vec{u}|^2.$$

4. Ke každému skalárnímu součinu přísluší dle definice norma, ale **ne každá norma je definována pomocí skalárního součinu**. Například:

a)  $\|\vec{u}\|_1 = |u_1| + |u_2| + \dots + |u_n|$ , (tzv. 1-norma)

b)  $\|\vec{u}\|_{\inf} = \max\{|u_1|, |u_2|, \dots, |u_n|\}$ ,

c)  $\|\vec{u}\|_2 = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}$ , Euklidovská norma (též 2-norma)

## 7 Důležité nerovnosti

Klíčovou roli při analýze vztahů v bodových (vektorových) prostorech hrají dvě nerovnosti:

- 1) Cauchyova-Schwarzova nerovnost,
- 2) Trojúhelníková nerovnost.

Ukážeme, že tyto nerovnosti platí v jakémkoliv vektorovém prostoru se skalárním součinem.

### 7.1 Cauchyova-Schwarzova nerovnost

**Věta 25** (Cauchyova-Schwarzova nerovnost). Pro jakýkoliv skalární součin platí:

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|,$$

pro všechny vektory  $\vec{a}, \vec{b} \in V_n$ . Rovnost nastává právě když jsou vektory  $\vec{a}, \vec{b}$  lineárně závislé (rovnoběžné).

(Pech:AGLÚ/str.90 - V.2.1)

*Důkaz.* Uvažujme vektor  $\vec{a} + k\vec{b}$ . Platí

$$\begin{aligned}\|\vec{a} + k\vec{b}\|^2 &\geq 0, \\ \|\vec{a}\|^2 + 2k\vec{a} \cdot \vec{b} + k^2\|\vec{b}\|^2 &\geq 0.\end{aligned}$$

Odtud plyne

$$\begin{aligned}4(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 - 4\|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 &\leq 0, \\ (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 &\leq \|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2, \\ |\vec{a} \cdot \vec{b}| &\leq \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|\end{aligned}$$

□

### Poznámka.

1. Používáme různé zápisy C-S nerovnosti:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 &\leq \sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2, \\ \left|\sum_{i=1}^n a_i b_i\right| &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2},\end{aligned}$$

2. Z C-S nerovnosti vyplývá, že pro každé dva vektory  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$  existuje jediné reálné číslo  $\alpha \in \langle 0, \pi \rangle$  pro které platí vztah

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \alpha.$$

Můžeme tak tuto nerovnost využít k definici úhlu mezi dvěma vektory. Pak je zřejmé, že velikost úhlu je, stejně jako délka, závislá na zvoleném skalárním součinu.

**Příklad:** Vypočítejte úhel mezi vektory  $\vec{v} = (1, 0, 1)$ ,  $\vec{w} = (0, 1, 1)$ .

a) Uvažujte Eukleidovský skalární součin.

b) Uvažujte vážený skalární součin  $\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 w_1 + 2v_2 w_2 + 3v_3 w_3$ .

**Problém:** Nechť  $a, b, c, d, e$  jsou reálná čísla, pro která platí:

$$\begin{aligned}a + b + c + d + e &= 8 \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 &= 16.\end{aligned}$$

Určete maximální hodnotu  $e$ .

## 7.2 Trojúhelníková nerovnost

Trojúhelníková nerovnost je známa též pod označením „Minkowského věta“.

**Věta 26** (Trojúhelníková nerovnost). *Pro normu vektoru příslušnou libovolnému skalárnímu sučinu platí:*

$$\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|,$$

pro všechny vektory  $\vec{a}, \vec{b} \in V_n$ . Rovnost nastává právě tehdy, když jsou vektory  $\vec{a}, \vec{b}$  závislé (rovnoběžné).

(Pech:AGLÚ/str.91 - V.2.2)

**Příklad:** Dokažte následující nerovnost:

$$\left| \|\vec{a}\| - \|\vec{b}\| \right| \leq \|\vec{a} - \vec{b}\|; \quad \vec{a}, \vec{b} \in V_n.$$

**Problém:** Zapište skalární součin vektorů  $\vec{u}, \vec{v}$  pouze užitím normy vektoru.

*Nápověda:* Uvědomte si, že platí tento vztah:

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2.$$

*Řešení:*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$

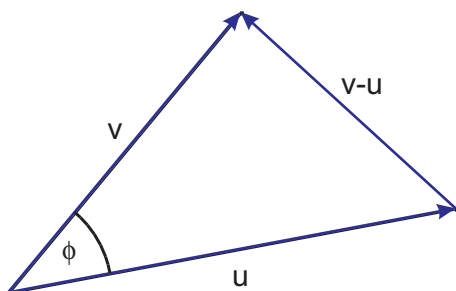
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$

## 7.3 Odchylka vektorů

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

(Pech:AGLÚ/str. 92 - D.2.1)

## 7.4 Kosinová věta



$$(\vec{v} - \vec{u})^2 = \vec{v}^2 - 2\vec{v}\vec{u} + \vec{u}^2$$

$$(\vec{v} - \vec{u})^2 = |\vec{v} - \vec{u}|^2, \quad \vec{v}^2 = |\vec{v}|^2, \quad \vec{u}^2 = |\vec{u}|^2$$

$$|\vec{v} - \vec{u}|^2 = |\vec{v}|^2 + |\vec{u}|^2 - 2|\vec{v}||\vec{u}| \cos \varphi$$

(Pech:AGLÚ/str. 92 - V.2.3)

## 7.5 Pythagorova věta

= kosinová věta pro  $\varphi = 90^\circ$ , tj.  $\cos \varphi = 0$  :

$$|\vec{v} - \vec{u}|^2 = |\vec{v}|^2 + |\vec{u}|^2$$

## 8 Ortogonální a ortonormální vektory

**Příklad:** Napište parametrické rovnice přímky, která prochází bodem  $A = [2, 3]$  kolmo na přímkou  $q: x = -5 + 7t, y = 4 - t; t \in \mathbb{R}$ .

**Definice 16** (Ortogonalní a ortonormální vektory).

Vektory  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k \in V_n$  jsou:

- (i) *ortogonální*  $\Leftrightarrow \vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = 0$ , pro všechna  $i, j = 1, 2, \dots, k; i \neq j$ ,
- (ii) *ortonormální*  $\Leftrightarrow$  *ortogonální* +  $|\vec{a}_i| = 1$ , pro všechna  $i = 1, 2, \dots, k$ .

(Pech:AGLÚ/str.94 - D.3.1)

**Poznámky.**

1. Ortogonální vektory  $\vec{u}, \vec{v}$  značíme takto

$$\vec{u} \perp \vec{v}.$$

2. Ortogonalita je zobecněním kolmosti. Proto se kromě pojmu „ortogonální vektory“ setkáme též s označením „kolmé vektory“.
3. Pojmem **ortogonální vektory** označujeme skupinu dvou, ale i více vektorů, které splňují definici 16. Tj. skupinu vektorů  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$  nazveme ortogonální, když pro každé dva **různé** vektory z nich platí  $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = 0$ .
4. **Ortonormální** jsou vektory, které jsou **ortogonální** a navíc všechny **jednotkové**, tj. platí:

$$\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = \delta_i^j,$$

kde  $\delta_i^j$  je Kroneckerovo delta ( $\delta_i^j = 1$  pro  $i = j$  a  $\delta_i^j = 0$  pro  $i \neq j$ ).

### 8.1 Ortonormální báze

**Definice 17.**

(Pech:AGLÚ/str.94 - D.3.2)

**Příklad:** Rozhodněte, zda se jedná o ortogonální či ortonormální báze:

- a)  $B_1 = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ ,
- b)  $B_2 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ ,
- c)  $B_3 = \{(2, 0, 0), (0, -1, 0), (0, 0, 4)\}$ .

**Věta 27.** Jsou-li nenulové vektory ortogonální, jsou lineárně nezávislé

(Pech:AGLÚ/str.94 - V.3.1)

## VÝHODY ORTONORMÁLNÍ BÁZE

### 1. Skalární součin

Jsou-li vektory  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  určeny souřadnicemi  $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ ,  $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  vzhledem k nějaké ortonormální bázi  $B$ , je jakýkoliv skalární součin těchto vektorů dán vztahem

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n,$$

bez ohledu na jeho konkrétní definici.

### 2. Souřadnice vektoru vzhledem k bázi

Nechť  $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  jsou souřadnice vektoru  $\vec{u}$  vzhledem k ortonormální bázi  $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$ . Vektor  $\vec{u}$  můžeme tedy psát jako lineární kombinaci vektorů báze  $B$ :

$$\vec{u} = u_1\vec{b}_1 + u_2\vec{b}_2 + \dots + u_n\vec{b}_n.$$

Potom pro souřadnice (koeficienty této lineární kombinace)  $u_i$  vektoru  $\vec{u}$  vzhledem k této bázi platí

$$u_i = \vec{u} \cdot \vec{b}_i.$$

**Příklad:** Určete souřadnice vektoru  $\vec{v} = (1, 1, 1)$  vzhledem k ortonormální bázi  $\vec{u}_1 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})$ ,  $\vec{u}_2 = (0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$ ,  $\vec{u}_3 = (\frac{5}{\sqrt{30}}, -\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}})$ ,

**Věta 28** (Existence ortonormální báze). Každý netriviální konečně generovaný vektorový prostor se skalárním součinem má aspoň jednu ortonormální bázi.

Věta 28 nám zaručuje existenci ortonormální báze v každém námi zkoumaném vektorovém prostoru. Otázkou je, jak tu bázi najít. Odpovědí se zabývá následující kapitola, ve které se skrývá i důkaz věty 28.

## 8.2 Gram - Schmidtův ortogonalizační proces

**Příklad:** Určete ortonormální bázi (pod)prostoru, který je generován vektory  $\vec{v}_1 = (1, 1, 2)$ ,  $\vec{v}_2 = (0, 1, -1)$ .

**Příklad:** Určete ortonormální bázi vektorového prostoru se skalárním součinem:  $W = [\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}]$ ;  $\vec{u}_1 = (1, 1, -1, -2)$ ,  $\vec{u}_2 = (5, 8, -2, -3)$ ,  $\vec{u}_3 = (3, 9, 3, 8)$ .

**Věta 29** (Gram - Schmidtův ortogonalizační proces).

(Pech:AGLÚ/str.95 - V.3.2)