Cvičení:
Skalární součin

1. Vypočítejte velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC, je-li: $A = [1, 2]$, $B = [3, 5]$, $C = [1 + 3\sqrt{3}, 2 - 2\sqrt{3}]$.

2. K vektorům $\vec{a} = (2, -1, 3)$, $\vec{b} = (1, -3, 2)$ a $\vec{c} = (3, 2, -4)$ určete vektor $\vec{x}$ tak, aby platilo $\vec{a} \cdot \vec{x} = -5$, $\vec{b} \cdot \vec{x} = -11$, $\vec{c} \cdot \vec{x} = 20$.

3. Kvádr $ABCDEFGH$ má délky hran $|AB| = 4$, $|BC| = 3$ a $|AE| = 5$. Vypočtěte úhel stěnové úhlopříčky DE a tělesové úhlopříčky DF.

4. Ze čtverce o straně a je sestrojen plášť pravidelného trojbokého hranolu. Vypočtěte úhel φ sousedních stran lomené čáry, kterou na plášti hranolu vytváří úhlopříčka daného čtverce.

5. V počítačové grafice se k určení viditelnosti nějaké plochy (ve tvaru $n-$úhelníku) používá výpočet úhlu mezi normálovým vektorem této plochy a vektorem, který určuje polohu kamery vzhledem k ploše (k některému z jejích vrcholů). Určete viditelnost plochy, jestliže její normálový vektor má souřadnice $(5, 5, -2)$, jeden z jejích vrcholů má souřadnice $[10, 10, 40]$ a kamera je umístěna v počátku souřadnicové soustavy.

6. Vypočtěte úhel mezi úsečkami AB a AC; $A = [1, 2, 3]$, $B = [-1, 0, 1]$, $C = [1, -2, 5]$.

7. Který z následujících výrazů definuje skalární součin $\vec{v} \cdot \vec{w}$ vektorů $\vec{v} = (v_1, v_2)$ a $\vec{w} = (w_1, w_2)$:

a) $2v_1w_1 + 3v_2w_2$, **b)** $v_1w_2 + v_2w_1$,

c) $v_1^2w_1^2 + v_2^2w_2^2$, **d)** $2v_1w_1 + (v_1 - v_2)(w_1 - w_2)$.

8. Určete ortonormální bázi vektorového (pod)prostoru W :

a) $W = [\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}]$; $\vec{v}_1 = (1, 1, 1), \vec{v}_2 = (0, 1, 1)$,

b) $W = [\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}]$; $\vec{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{v}_2 = (0, 1, 1)$, $\vec{v}_3 = (1, 0, 1)$,

c) $W = [\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}]$; $\vec{v}_1 = (1, 1, -1)$, $\vec{v}_2 = (1, 0, 2)$, $\vec{v}_3 = (2, -2, 3)$,

c) $W = [\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}]$; $\vec{u}_1 = (1, 1, 2, 1), \vec{u}_2 = (0, 1, 1, 1), \vec{u}_3 = (3, 1, 0, 1)$.

9. Určete ortonormální bázi vektorového podprostoru $V \subseteq\subseteq \mathbb{R}^4$, který obsahuje všechny vektory kolmé na vektor $\vec{u} = (1, 2, -1, -3)$.

10. Určete ortonormální báze následujících vektorových podprostorů $\mathbb{R}^3$:

a) Rovina generovaná vektory $(0, 2, 1)$, $(1, -2, -1)$.

b) Rovina definovaná rovnicí $2x - y + 3z = 0$.

c) Množina všech vektorů kolmých na vektor $(1, -1, -2)$.