## 9.2 Afinní bodový podprostor

Afinním bodovým podprostorem rozumíme neprázdnou podmnožinu bodového prostoru, která je sama afinním bodovým prostorem (tj. splňuje jeho definici).

**Definice 19** (Afinní bodový podprostor)**.** ...

**(Pech:AGLÚ/str.16 - Definice 3.1)**

Afinní bodový podprostor $A_k$ prostoru $A_n$ značíme takto:

$$A_k \subseteq\subseteq A_n.$$

**Příklady afinního bodového podprostoru**

**1.** $A_n \subseteq\subseteq A_n$

**2.** bod, přímka, rovina $\subseteq\subseteq A_2$

**3.** bod, přímka, rovina $\subseteq\subseteq A_3$

**Otázka:** Může být bodovým podprostorem polorovina, úsečka, kruh?

**Speciální podprostory** **(Pech:AGLÚ/str.17 - D.3.2)**

- **přímka** ... podprostor dimenze 1 (značíme: $A_1$)
- **rovina** ... podprostor dimenze 2 (značíme: $A_2$)
- **nadrovina** ... podprostor dimenze $n-1$ (značíme: $A_{n-1}$)

## 9.3 (Vektorově) parametrické vyjádření podprostoru

**PŘÍKLAD 9.4.** *Vrcholem $C$ trojúhelníku $ABC$ veďte rovnoběžku se stranou $AB$.*

*Řešení:* $X = C + t(B - A);\ t \in R.$

**PŘÍKLAD 9.5.** *Bodem $V$ veďte rovinu rovnoběžnou s rovinou $\sigma = (KLM)$.*

*Řešení:* $X = V + r(L - K) + s(M - K);\ r, s \in R.$

Každý bod bodového podprostoru $A_k \subseteq\subseteq A_n$ můžeme psát ve tvaru

$$X = A + \vec{x},$$

kde $A$ je pevně zvolený bod z $A_k$ a $\vec{x}$ je vektor z vektorového podprostoru $V_k \subseteq\subseteq V_n$.

**Věta 31.** ...

**(Pech:AGLÚ/str.16 - V.3.1)**

Tvrzení uvedené věty lze stručně vyjádřit takto:

Pevný bod $A$ + „vektorový podprostor $V_k$“ = „bodový podprostor $\{A+\vec{x}; \vec{x} \in V_k\}$“

**PŘÍKLAD 9.6.** *Vyjádřete parametricky přímku, která prochází body $K, L$.*

*Řešení:* $X = K + t(L - K);\ t \in R$ nebo $X = L + s(L - K);\ s \in R$

**Věta 32.** *Afinní bodový podprostor $A_k$ je určen svým zaměřením $V_k$ a libovolným ze svých bodů $A$. Zapisujeme*

$$A_k = [A, V_k]\,.$$

**(Pech:AGLÚ/str.17 - V.3.2)**

*Důkaz.* Dokážeme postupně: $\forall X; X \in [A, V_k] \Rightarrow X \in [B, V_k]$ a $\forall X; X \in [B, V_k] \Rightarrow X \in [A, V_k]\,,$ □

**Věta 33** (Vektorově parametrické vyjádření podprostoru)**.** ...

$$\left.\begin{aligned} A_k &= [A, V_k] \\ X &= A + \vec{x} \end{aligned}\right\} \quad X = A + t_1\vec{u}_1 + t_2\vec{u}_2 + ... + t_k\vec{u}_k$$

$\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_k\}$ ... *báze zaměření* $V_k$, $t_1, t_2, ..., t_k$ ... *parametry*
*Zapisujeme:*

$$A_k = [A; \vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_k]\,.$$

**(Pech:AGLÚ/str.18 - V.3.3)**

*Důkaz.* Plyne z vět 31 32 □

## Parametrická vyjádření speciálních podprostorů

- **přímka** ... $A_1 = [A; \vec{u}]$

$$X = A + t\vec{u},$$

- **rovina** ... $A_2 = [A; \vec{u}_1, \vec{u}_2]$

$$X = A + t_1\vec{u}_1 + t_2\vec{u}_2,$$

- **nadrovina** … $A_{n-1} = [A; \vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_{n-1}]$

$$X = A + \sum_{i=1}^{n-1} t_i \vec{u}_i,$$

- **afinní prostor** … $A_n = [A; \vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n]$

$$X = A + \sum_{i=1}^{n} t_i \vec{u}_i.$$

**PŘÍKLAD 9.7.** *Přímka $p = [A; \vec{u}]$ je dána bodem $A = [1, 2, 3]$ a směrovým vektorem $\vec{u} = (-2, 5, 11)$. Napište:*
*a) vektorově parametrické vyjádření přímky $p$,*
*b) parametrické rovnice přímky $p$.*

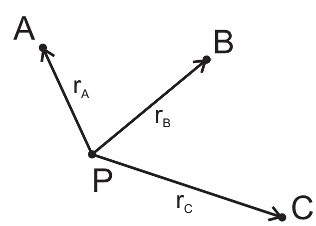
## 9.4 Afinní souřadnice bodů

Víme, že zvolením pevného bodu $P$ lze zajistit vzájemně jednoznačné zobrazení prostoru bodů na prostor vektorů:

$A - P = \vec{r}_A \quad \longrightarrow \quad A = P + \vec{r}_A$

$B - P = \vec{r}_B \quad \longrightarrow \quad B = P + \vec{r}_B$

$C - P = \vec{r}_C \quad \longrightarrow \quad C = P + \vec{r}_C$




Potom mohu bod **jednoznačně určit** pomocí souřadnic příslušného vektoru (vzhledem k bázi zaměření $V_n$).

**Definice 20** (Afinní soustava souřadnic - repér)**.** *Nechť $P$ je libovolný bod z afinního prostoru $A_n$, $n > 0$. Nechť $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ je báze vektorového zaměření $V_n$ prostoru $A_n$. Potom uspořádanou $(n+1)$-tici*

$$\varphi = (P, \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$$

*nazýváme afinní soustavou souřadnic $\varphi$ (též repérem $\varphi$) v prostoru $A_n$.*
*Souřadnicemi bodu $X \in A_n$ v soustavě souřadnic $\varphi$ budeme rozumět souřadnice vektoru $X - P$ v bázi $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$.*

**(Pech:AGLÚ/str.19 - D.4.1)**

**Zápis souřadnic bodu $P$:**

$$\varphi = (P, \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$$

$$X - P = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + ... + x_n\vec{e}_n$$

$$X = P + x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + ... + x_n\vec{e}_n$$

$$X = P + \sum_{i=1}^{n} x_i\vec{e}_i$$

$$X = [x_1, x_2, ..., x_n]$$

**Důležité pojmy:**

- $P$ … počátek,
- $x_1, x_2, ..., x_n$ … souřadnice,
- $\vec{r} = X - P$ … radiusvektor (průvodič) bodu $X$

**Poznámka** (1)**.** Prostor se soustavou souřadnic $\varphi$ zapisujeme:

$$A_n = [P; \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n] .$$

**Poznámka** (2)**.** Souřadnice bodu a jeho radiusvektoru jsou stejné.

**Poznámka** (3)**.** Souřadnice bodů a vektorů někdy odlišujeme typem závorek

$$X = [x_1, x_2, ..., x_n]$$

$$\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$$

**Poznámka** (4)**.**

$$P = [0, 0, ..., 0]$$

**PŘÍKLAD 9.8.** *V afinní rovině $A_2$ je dán repér $\mathcal{R} = \{P, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Bod $A$ má vzhledem k $\mathcal{R}$ souřadnice $A = [-1; 2]$ a vektor $\vec{v}$ má vzhledem k $\mathcal{R}$ souřadnice $\vec{v} = (3; -2)$. Potom platí*

$$A = P - \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2,$$

$$\vec{v} = 3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2.$$

## 9.5 Parametrické rovnice podprostoru

**PŘÍKLAD 9.9.** *Zjistěte, zda body* $A_1 = [0, 0, -3]$, $A_2 = [1, 1, 3]$, *leží v rovině* $[A; \vec{u}, \vec{v}]$, *kde* $A = [1, 1, -4]$, $\vec{u} = (-1, -1, 1)$, $\vec{v} = (1, 3, 1)$.

Vektorově parametrická rovnice roviny (podprostoru):

$$X = A + t_1\vec{u} + t_2\vec{v}; \quad t_1, t_2 \in R$$

Parametrické rovnice roviny (podprostoru):

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 + t_1u_1 + t_2v_1 \\ x_2 &= a_2 + t_1u_2 + t_2v_2 \\ x_3 &= a_3 + t_1u_3 + t_2v_3 \end{aligned} \tag{19}$$

**Věta 34** (Parametrické rovnice podprostoru)**.** *Nechť je v afinním prostoru* $A_n$ *dána soustava souřadnic* $\varphi$. *Potom můžeme podprostor* $A_k$; $A_k = [A; \vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_k]$, *prostoru* $A_n$ *určit parametrickými rovnicemi*

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 + u_{11}t_1 + u_{21}t_2 + ... + u_{k1}t_k \\ x_2 &= a_2 + u_{12}t_1 + u_{22}t_2 + ... + u_{k2}t_k \\ \cdots\cdots & \\ x_n &= a_n + u_{1n}t_1 + u_{2n}t_2 + ... + u_{kn}t_k \end{aligned} \tag{20}$$

*zkráceně*

$$x_j = a_j + \sum_{i=1}^{k} u_{ij}t_i; \quad j = 1, 2, ..., n,$$

*kde* $A = [a_1, a_2, ..., a_n]$, $\vec{u}_i = (u_{i1}, u_{i2}, ..., u_{in})$, $i = 1, 2, ..., k$.

**(Pech:AGLÚ/str.21 - V.4.1)**

*Důkaz.* Důsledek věty 33 □

**Poznámka.** Počet parametrů je roven dimenzi podprostoru $k$, počet rovnic je roven dimenzi prostoru $n$.

**PŘÍKLAD 9.10.** *Určete dimenzi afinního bodového prostoru* $A_n$ *a jeho podprostoru* $A_k$ *daného rovnicí:*

*a)* $X = [4, -4, 2, 1, 1] + t\,(2, -8, 3, -5, 1)$,

*b)* $X = [1, 0, 2, 2] + r\,(1, -1, 0, 0) + s\,(1, 2, 0, -1)$.

## 9.6 Kanonický tvar rovnice přímky

**PŘÍKLAD 9.11.** *Napište parametrické vyjádření a kanonický tvar rovnice přímky, která je dána bodem $A$ a směrovým vektorem $\vec{u}$.*

*a)* $A = [3, 1, -4]$, $\vec{u} = (2, 7, 5)$,

*b)* $A = [2, 5, 1]$, $\vec{u} = (1, 2, 0)$.

**PŘÍKLAD 9.12.** *Zjistěte, jaké bodové podprostory jsou určené parametrickými rovnicemi*

$$(a)\quad \begin{aligned} x_1 &= r + s \\ x_2 &= 1 - s \\ x_3 &= -5 + 2r \\ x_4 &= 2 - r + 4s, \end{aligned} \qquad\qquad (b)\quad \begin{aligned} x_1 &= 5 - r + s + t \\ x_2 &= r \\ x_3 &= s \\ x_4 &= 2 + 4s - t. \end{aligned}$$

## 9.7 Určení afinního podprostoru

„Jakým nejmenším počtem bodů je jednoznačně určena přímka a rovina?“

*Odpověď:* Přímka je určena dvěma různými body, rovina třemi nekolineárními body.

**Definice 21** (Lineárně nezávislé body). *Skupina $k+1$ bodů $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_k$ z prostoru $A_n$ se nazývá lineárně závislá (nezávislá), jsou-li vektory $A_i - A_0$, $i = 1, 2, \ldots, k$, lineárně závislé (nezávislé).*

**(Pech:AGLÚ/str.26 - D.5.1)**

**Věta 35** (O určení afinního bodového podprostoru). *Afinní bodový podprostor $A_k$ prostoru $A_n$ je určen jednoznačně $k+1$ lineárně nezávislými body.*

**(Pech:AGLÚ/str.26 - V.5.1)**

*Důkaz.* Lze převést na větu 32:

$$A_k = [A_0, A_1 - A_0, A_2 - A_0, \ldots, A_k - A_0]$$

□

**Důsledky:**

- přímka je určena dvěma nezávislými body

- rovina je určena třemi nezávislými body
- nadrovina je určena $n$ nezávislými body

**Poznámka.** Body ležící na jedné společné přímce nazýváme **kolineární** body. Body ležící v jedné rovině pak **komplanární** body.

**PŘÍKLAD 9.13.** *Napište vektorově parametrickou rovnici roviny $\rho = (A, B, C)$, kde $A = [1, 0, 1]$, $B = [3, 4, 2]$ a $C = [5, 1, 0]$.*

*Řešení:* Vektorově parametrická rovnice:

$$X = A + t_1(B - A) + t_2(C - A);\ t_1, t_2 \in R$$

Parametrické rovnice:

$$\begin{aligned} x &= a_1 + t_1(b_1 - a_1) + t_2(c_1 - a_1) \\ y &= a_2 + t_1(b_2 - a_2) + t_2(c_2 - a_2) \\ z &= a_3 + t_1(b_3 - a_3) + t_2(c_3 - a_3);\ t_1, t_2 \in R \end{aligned}$$

Po dosazení souřadnic dostaneme:

$$\begin{aligned} x &= 1 + 2t_1 + 4t_2 \\ y &= 4t_1 + t_2 \\ z &= 1 + t_1 - t_2 \end{aligned}$$

**Věta 36** (Parametrická rovnice podprostoru)**.** *Vektorově parametrická rovnice podprostoru $A_k$, který je určen $k+1$ lineárně nezávislými body $A_0, A_1, ..., A_k$ je*

$$X = A_0 + \sum_{i=1}^{k} t_i(A_i - A_0), \tag{21}$$

*kde $X$ je libovolný bod podprostoru $A_k$ a $t_i$ jsou parametry.*

**(Pech:AGLÚ/str.27 - V.5.2)**

*Důkaz.* viz Věta 33 □

**Důsledky:**

- Přímka: $X = A + t(B - A);\ t \in R$
- Rovina: $X = A + t_1(B - A) + t_2(C - A);\ t_1, t_2 \in R$
- Nadrovina: $X = A_0 + t_1(A_1 - A_0) + t_2(A_2 - A_0) + ... + t_{n-1}(A_{n-1} - A_0);\ t_1, t_2, ..., t_{n-1} \in R$

**PŘÍKLAD 9.14.** *V $A_4$ jsou dány body $K = [1, 0, 1, 2]$, $L = [4, 2, 3, 1]$, $M = [-1, 3, 0, 1]$, $N = [2, 1, 1, 5]$. Rozhodněte, zda určují podprostor $A_3 \subseteq\subseteq A_4$. Pokud ano, napište jeho parametrické vyjádření.*

**PŘÍKLAD 9.15.** *Rovina je určena body $A = [2, 1, 0]$, $B = [2, 4, 1]$ a směrem vektoru $\vec{u} = (1, 1, 3)$. Napište její parametrické rovnice.*

## Cvičení:
## Parametrické rovnice afinního bodového podprostoru

**1:** Zjistěte, zda body $A_1 = [2, 1, -1]$, $A_2 = [3, 3, 1]$, $A_3 = [2, 1, -5]$, $A_4 = [5, 4, -1]$, $A_5 = [5, 7, 4]$ leží na přímce $[A; \vec{u}]$, kde $A = [3, 3, -2]$ a $\vec{u} = (1, 2, 3)$.

**2:** Zjistěte, zda body $A_1 = [0, 0, -3]$, $A_2 = [1, 1, 3]$, $A_3 = [3, 1, -5]$, $A_4 = [1, 2, -3]$, $A_5 = [-1, -2, -3]$, $A_6 = [1, 3, 1]$ leží v rovině $[A; \vec{u}, \vec{v}]$, kde $A = [1, 1, -4]$, $\vec{u} = (-1, -1, 1)$ a $\vec{v} = (1, 3, 1)$.

**3:** Napište parametrické rovnice a kanonický tvar rovnice přímky $[K; \vec{m}]$, je-li:

a) $K = [1, -2],\ \vec{m} = (5, 9)$,

b) $K = [2, 5, -3],\ \vec{m} = (-4, 0, 1)$,

c) $K = [1, 0, -1, 0, 2],\ \vec{m} = (4, 3, 1, 2, 1)$.

**4:** Napište parametrické rovnice roviny $\rho$, která je dána těmito údaji:

a) $\rho = [K, L, M];\ K = [2, 0, 1],\ L = [-1, 2, 3],\ M = [3, 1, -5]$,

b) $\rho = [A; \vec{u}, \vec{v}];\ A = [1, 0, 2, 3],\ \vec{u} = (1, 1, -1, 0),\ \vec{v} = (4, 0, 3, 2)$,

c) $\rho = [P, Q, \vec{w}];\ P = [7, -8, 3],\ Q = [4, 5, 1],\ \vec{w} = (2, 3, 4)$.

**5:** Napište parametrické rovnice přímky $p$, která prochází daným bodem $P = [4, 5, -6]$ a je rovnoběžná s přímkou $q : x = 2 + r,\ y = -4 + 2r,\ z = 9 - 5r;\ r \in \mathbb{R}$.

**6:** Napište parametrické rovnice přímky $p$, která prochází daným bodem $B = [1, 2]$ a je kolmá na přímku $q = [M, N];\ M = [0, 1], N = [4, 3]$.

**7:** Napište parametrické rovnice roviny $\rho$ procházející bodem $Q = [5, 10, 12]$ rovnoběžně s rovinou $\sigma$ danou rovnicemi:

$$\begin{aligned} x &= 1 - 4s + t, \\ y &= -3 + s - 2t, \\ z &= 3s + 5t;\ \ s, t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

**8:** Napište parametrické rovnice úsečky $AB$, je-li:

a) $A = [-2, 5],\ B = [15, 9]$,

b) $A = [2, 5, -3],\ B = [0, 4, 1]$.

**9:** Určete parametrické vyjádření roviny, která prochází přímkou $x = 2-3t$, $y = 7+t$, $z = -1 + 2t$ a je rovnoběžná s přímkou $x = 3 - r$, $y = 2 + 4r$, $z = 1 - r$.

**10:** Parametrickými rovnicemi vyjádřete polorovinu určenou bodem $A = [3, 2, 1]$ a přímkou $x = 1 + t$, $y = 2 - 3t$, $z = 3 + 4t$.

**11:** Rozhodněte o poloze bodu $M = [3, 3]$ vzhledem k trojúhelníku $ABC$, je-li $A = [0, 0]$, $B = [10, 2]$, $C = [6, 12]$.