13.2 Afinní bodový podprostor

Afinním bodovým podprostorem rozumíme neprázdnou podmnožinu bodového prostoru, která je sama afinním bodovým prostorem (tj. splňuje jeho definici).

DEFINICE 19 (Afinní bodový podprostor). ...

(Pech:AGLÚ/str.16 - Definice 3.1)

Afinní bodový podprostor A_k prostoru A_n značíme takto:

$$A_k \subseteq\subseteq A_n.$$

Příklady afinního bodového podprostoru

1. $A_n \subseteq\subseteq A_n$

2. bod, přímka, rovina $\subseteq\subseteq A_2$

3. bod, přímka, rovina $\subseteq\subseteq A_3$

Otázka: Může být bodovým podprostorem polorovina, úsečka, kruh?

Speciální podprostory **(Pech:AGLÚ/str.17 - D.3.2)**

- **přímka** ... podprostor dimenze 1 (značíme: A_1)
- **rovina** ... podprostor dimenze 2 (značíme: A_2)
- **nadrovina** ... podprostor dimenze $n-1$ (značíme: A_{n-1})

13.3 (Vektorově) parametrické vyjádření podprostoru

PŘÍKLAD 13.3. *Vrcholem C trojúhelníku ABC veďte rovnoběžku se stranou AB.*

Řešení: $X = C + t(B - A);\ t \in R.$

PŘÍKLAD 13.4. *Bodem V veďte rovinu rovnoběžnou s rovinou $\sigma = (KLM)$.*

Řešení: $X = V + r(L - K) + s(M - K);\ r, s \in R.$

Každý bod bodového podprostoru $A_k \subseteq\subsetneq A_n$ můžeme psát ve tvaru

$$X = A + \vec{x},$$

kde A je pevně zvolený bod z A_k a $\vec{x}$ je vektor z vektorového podprostoru $V_k \subseteq\subsetneq V_n$.

Věta 28. ...

(Pech:AGLÚ/str.16 - V.3.1)

Tvrzení uvedené věty lze stručně vyjádřit takto:

Pevný bod A + „vektorový podprostor V_k“ = „bodový podprostor $\{A + \vec{x}; \vec{x} \in V_k\}$“

PŘÍKLAD 13.5. *Vyjádřete parametricky přímku, která prochází body K, L.*

Řešení: $X = K + t(L - K);\ t \in R$ nebo $X = L + s(L - K);\ s \in R$

Věta 29. *Afinní bodový podprostor A_k je určen svým zaměřením V_k a libovolným ze svých bodů A. Zapisujeme*

$$A_k = [A, V_k]\,.$$

(Pech:AGLÚ/str.17 - V.3.2)

Důkaz. Dokážeme postupně: $\forall X; X \in [A, V_k] \Rightarrow X \in [B, V_k]$ a $\forall X; X \in [B, V_k] \Rightarrow X \in [A, V_k]\,,$ $\square$

Věta 30 (Vektorově parametrické vyjádření podprostoru). ...

$$\left.\begin{array}{r} A_k = [A, V_k] \\ X = A + \vec{x} \end{array}\right\} \qquad X = A + t_1\vec{u}_1 + t_2\vec{u}_2 + ... + t_k\vec{u}_k$$

$\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_k\}$ ... *báze zaměření* V_k, $t_1, t_2, ..., t_k$ ... *parametry*
Zapisujeme:

$$A_k = [A; \vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_k]\,.$$

(Pech:AGLÚ/str.18 - V.3.3)

Důkaz. Plyne z vět 28 29 ☐

Parametrická vyjádření speciálních podprostorů

- **přímka** ... $A_1 = [A; \vec{u}]$

$$X = A + t\vec{u},$$

- **rovina** ... $A_2 = [A; \vec{u}_1, \vec{u}_2]$

$$X = A + t_1\vec{u}_1 + t_2\vec{u}_2,$$

- **nadrovina** ... $A_{n-1} = [A; \vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_{n-1}]$

$$X = A + \sum_{i=1}^{n-1} t_i\vec{u}_i,$$

- **afinní prostor** ... $A_n = [A; \vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n]$

$$X = A + \sum_{i=1}^{n} t_i\vec{u}_i.$$

PŘÍKLAD 13.6. *Přímka* $p = [A; \vec{u}]$ *je dána bodem* $A = [1, 2, 3]$ *a směrovým vektorem* $\vec{u} = (-2, 5, 11)$. *Napište:*
a) vektorově parametrické vyjádření přímky p,
b) parametrické rovnice přímky p.

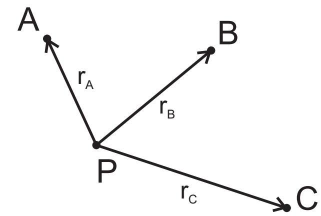
13.4 Afinní souřadnice bodů

Víme, že zvolením pevného bodu P lze zajistit vzájemně jednoznačné zobrazení prostoru bodů na prostor vektorů:

$A - P = \vec{r}_A \quad \longrightarrow \quad A = P + \vec{r}_A$

$B - P = \vec{r}_B \quad \longrightarrow \quad B = P + \vec{r}_B$

$C - P = \vec{r}_C \quad \longrightarrow \quad C = P + \vec{r}_C$



Potom mohu bod **jednoznačně určit** pomocí souřadnic příslušného vektoru (vzhledem k bázi zaměření V_n).

DEFINICE 20 (Afinní soustava souřadnic - repér). *Nechť P je libovolný bod z afinního prostoru A_n, $n > 0$. Nechť $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ je báze vektorového zaměření V_n prostoru A_n. Potom uspořádanou $(n+1)$-tici*

$$\varphi = (P, \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$$

nazýváme afinní soustavou souřadnic φ (též repérem φ) v prostoru A_n. Souřadnicemi bodu $X \in A_n$ v soustavě souřadnic φ budeme rozumět souřadnice vektoru $X - P$ v bázi $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$.

(Pech:AGLÚ/str.19 - D.4.1)

Zápis souřadnic bodu P:

$$\varphi = (P, \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$$

$$X - P = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + ... + x_n\vec{e}_n$$

$$X = P + x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + ... + x_n\vec{e}_n$$

$$X = P + \sum_{i=1}^{n} x_i\vec{e}_i$$

$$X = [x_1, x_2, ..., x_n]$$

Důležité pojmy:

- P ... počátek,
- $x_1, x_2, ..., x_n$ ... souřadnice,
- $\vec{r} = X - P$ ... radiusvektor (průvodič) bodu X

Poznámka (1). Prostor se soustavou souřadnic φ zapisujeme:

$$A_n = [P; \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n] .$$

Poznámka (2). Souřadnice bodu a jeho radiusvektoru jsou stejné.

Poznámka (3). Souřadnice bodů a vektorů někdy odlišujeme typem závorek

$$X = [x_1, x_2, ..., x_n]$$

$$\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$$

Poznámka (4).

$$P = [0, 0, ..., 0]$$

PŘÍKLAD 13.7. *V afinní rovině A_2 je dán repér $\mathcal{R} = \{P, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Bod A má vzhledem k $\mathcal{R}$ souřadnice $A = [-1; 2]$ a vektor $\vec{v}$ má vzhledem k $\mathcal{R}$ souřadnice $\vec{v} = (3; -2)$. Potom platí*

$$A = P - \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2,$$

$$\vec{v} = 3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2.$$

13.5 Parametrické rovnice podprostoru

PŘÍKLAD 13.8. *Zjistěte, zda body $A_1 = [0, 0, -3]$, $A_2 = [1, 1, 3]$, leží v rovině $[A; \vec{u}, \vec{v}]$, kde $A = [1, 1, -4]$, $\vec{u} = (-1, -1, 1)$, $\vec{v} = (1, 3, 1)$.*

Vektorově parametrická rovnice roviny (podprostoru):

$$X = A + t_1\vec{u} + t_2\vec{v}; \quad t_1, t_2 \in R$$

Parametrické rovnice roviny (podprostoru):

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 + t_1 u_1 + t_2 v_1 \\ x_2 &= a_2 + t_1 u_2 + t_2 v_2 \\ x_3 &= a_3 + t_1 u_3 + t_2 v_3 \end{aligned} \tag{9}$$

Věta 31 (Parametrické rovnice podprostoru). *Nechť je v afinním prostoru A_n dána soustava souřadnic φ. Potom můžeme podprostor A_k; $A_k = [A; \vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_k]$, prostoru A_n určit parametrickými rovnicemi*

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 + u_{11}t_1 + u_{21}t_2 + ... + u_{k1}t_k \\ x_2 &= a_2 + u_{12}t_1 + u_{22}t_2 + ... + u_{k2}t_k \\ \ldots&\ldots \\ x_n &= a_n + u_{1n}t_1 + u_{2n}t_2 + ... + u_{kn}t_k \end{aligned} \tag{10}$$

zkráceně

$$x_j = a_j + \sum_{i=1}^{k} u_{ij}t_i; \quad j = 1, 2, ..., n,$$

kde $A = [a_1, a_2, ..., a_n]$, $\vec{u}_i = (u_{i1}, u_{i2}, ..., u_{in})$, $i = 1, 2, ..., k$.

(Pech:AGLÚ/str.21 - V.4.1)

Důkaz. Důsledek věty 30 □

Poznámka. Počet parametrů je roven dimenzi podprostoru k, počet rovnic je roven dimenzi prostoru n.

PŘÍKLAD 13.9. *Určete dimenzi afinního bodového prostoru A_n a jeho podprostoru A_k daného rovnicí:*

a) $X = [4, -4, 2, 1, 1] + t\,(2, -8, 3, -5, 1)$,

b) $X = [1, 0, 2, 2] + r\,(1, -1, 0, 0) + s\,(1, 2, 0, -1)$.

13.6 Kanonický tvar rovnice přímky

PŘÍKLAD 13.10. *Napište parametrické vyjádření a kanonický tvar rovnice přímky, která je dána bodem A a směrovým vektorem $\vec{u}$.*

a) $A = [3, 1, -4]$, $\vec{u} = (2, 7, 5)$,

b) $A = [2, 5, 1]$, $\vec{u} = (1, 2, 0)$.

PŘÍKLAD 13.11. *Zjistěte, jaké bodové podprostory jsou určené parametrickými rovnicemi*

(a)
$$\begin{aligned} x_1 &= r + s \\ x_2 &= 1 - s \\ x_3 &= -5 + 2r \\ x_4 &= 2 - r + 4s, \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x_1 &= 5 - r + s + t \\ x_2 &= r \\ x_3 &= s \\ x_4 &= 2 + 4s - t. \end{aligned}$$

13.7 Určení afinního podprostoru

„Jakým nejmenším počtem bodů je jednoznačně určena přímka a rovina?“

Odpověď: Přímka je určena dvěma různými body, rovina třemi nekolineárními body.

DEFINICE 21 (Lineárně nezávislé body). *Skupina $k+1$ bodů $A_0, A_1, A_2, ..., A_k$ z prostoru A_n se nazývá lineárně závislá (nezávislá), jsou-li vektory $A_i - A_0$, $i = 1, 2, ..., k$, lineárně závislé (nezávislé).*

(Pech:AGLÚ/str.26 - D.5.1)

Věta 32 (O určení afinního bodového podprostoru). *Afinní bodový podprostor A_k prostoru A_n je určen jednoznačně $k+1$ lineárně nezávislými body.*

(Pech:AGLÚ/str.26 - V.5.1)

Důkaz. Lze převést na větu 29:

$$A_k = [A_0, A_1 - A_0, A_2 - A_0, ..., A_k - A_0]$$

□

Důsledky:

- přímka je určena dvěma nezávislými body
- rovina je určena třemi nezávislými body
- nadrovina je určena n nezávislými body

Poznámka. Body ležící na jedné společné přímce nazýváme **kolineární** body. Body ležící v jedné rovině pak **komplanární** body.

PŘÍKLAD 13.12. *Napište vektorově parametrickou rovnici roviny* $\rho = (A, B, C)$, *kde* $A = [1, 0, 1]$, $B = [3, 4, 2]$ *a* $C = [5, 1, 0]$.

Řešení: Vektorově parametrická rovnice:

$$X = A + t_1(B - A) + t_2(C - A);\ t_1, t_2 \in R$$

Parametrické rovnice:

$$\begin{aligned} x &= a_1 + t_1(b_1 - a_1) + t_2(c_1 - a_1) \\ y &= a_2 + t_1(b_2 - a_2) + t_2(c_2 - a_2) \\ z &= a_3 + t_1(b_3 - a_3) + t_2(c_3 - a_3);\ t_1, t_2 \in R \end{aligned}$$

Po dosazení souřadnic dostaneme:

$$\begin{aligned} x &= 1 + 2t_1 + 4t_2 \\ y &= 4t_1 + t_2 \\ z &= 1 + t_1 - t_2 \end{aligned}$$

Věta 33 (Parametrická rovnice podprostoru). *Vektorově parametrická rovnice podprostoru A_k, který je určen $k+1$ lineárně nezávislými body $A_0, A_1, ..., A_k$ je*

$$X = A_0 + \sum_{i=1}^{k} t_i(A_i - A_0), \tag{11}$$

kde X je libovolný bod podprostoru A_k a t_i jsou parametry.

(Pech:AGLÚ/str.27 - V.5.2)

Důkaz. viz Věta 30 □

Důsledky:

- Přímka: $X = A + t(B - A);\ t \in R$
- Rovina: $X = A + t_1(B - A) + t_2(C - A);\ t_1, t_2 \in R$
- Nadrovina: $X = A_0 + t_1(A_1 - A_0) + t_2(A_2 - A_0) + ... + t_{n-1}(A_{n-1} - A_0);\ t_1, t_2, ..., t_{n-1} \in R$

PŘÍKLAD 13.13. *V A_4 jsou dány body $K = [1,0,1,2]$, $L = [4,2,3,1]$, $M = [-1,3,0,1]$, $N = [2,1,1,5]$. Rozhodněte, zda určují podprostor $A_3 \subseteq\subseteq A_4$. Pokud ano, napište jeho parametrické vyjádření.*

PŘÍKLAD 13.14. *Rovina je určena body $A = [2,1,0]$, $B = [2,4,1]$ a směrem vektoru $\vec{u} = (1,1,3)$. Napište její parametrické rovnice.*

13.8 Neparametrická (obecná) rovnice nadroviny

Množina všech řešení soustavy m lineárních rovnic o n neznámých

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

je **afinní podprostor prostoru** A_n, jehož dimenze je $k = n - h$, kde $h = h(A) = h(A^*)$. Naopak, každý afinní podprostor A_k dimenze k lze popsat soustavou $n - k$ nezávislých rovnic. Konkrétně nás v tuto chvíli zajímá skutečnost, že **každou nadrovinu lze popsat jednou lineární rovnicí**, které říkáme **neparametrická** nebo **obecná rovnice** nadroviny. Jednou rovnicí proto, že dimenze nadroviny je $n - 1$ a je-li $k = n - 1 = n - h$, musí být $h = 1$.

PŘÍKLAD 13.15. *Přímka je nadrovinou prostoru A_2. Uvažujme přímku $p = [A, B]$; $A = [-5, 3]$, $B = [2, 4]$. Určete obecnou rovnici přímky p.*

Řešení: Z parametrických rovnic přímky

$$\begin{aligned} p:\ \ x &= -5 + 7t \\ y &= 3 + t;\ \ t \in R \end{aligned}$$

vyloučíme parametr t. Výsledkem bude rovnice bez parametru - neparametrická (obecná) rovnice přímky:

$$x - 7y + 26 = 0.$$

PŘÍKLAD 13.16. *Určete obecnou (neparametrickou) rovnici nadroviny prostoru A_3.*

Řešení: Nadrovina prostoru A_3 je určena třemi nezávislými body A, B, C; $A = [a_1, a_2, a_3]$, $B = [b_1, b_2, b_3]$, $C = [c_1, c_2, c_3]$. Potom ji můžeme vyjádřit vektorově parametrickou rovnicí:

$$X = A + t_1(B - A) + t_2(C - A).$$

Po jejím přepsání do tvaru

$$t_0(X - A) + t_1(B - A) + t_2(C - A) = \vec{o}$$

je zřejmé, že vektory $X - A$, $B - A$ a $C - A$ jsou **lineárně závislé**. Z toho plyne tvrzení následující věty.

Věta 34. *Budiž nadrovina* A_{n-1} *určena* n *lineárně nezávislými body* $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$, *které mají v bodovém prostoru* A_n *souřadnice* $A_i = [a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}]$, $i = 0, 1, \dots, n-1$. *Každý bod nadroviny* $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ *splňuje rovnici*

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & 1 \\ a_{01} & a_{02} & \dots & a_{0n} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n} & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{12}$$

zvanou **neparametrická (obecná) rovnice nadroviny**.

(Pech:AGLÚ/str.31 - V.6.1)

Důkaz. Myšlenka důkazu je uvedena před větou 34. Zbývá jenom ukázat, že platí ekvivalence

$$\begin{vmatrix} x_1 - a_{01} & x_2 - a_{02} & \dots & x_n - a_{0n} \\ a_{11} - a_{01} & a_{12} - a_{02} & \dots & a_{1n} - a_{0n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} - a_{01} & a_{n-1,2} - a_{02} & \dots & a_{n-1,n} - a_{0n} \end{vmatrix} = 0 \iff$$

$$\iff \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & 1 \\ a_{01} & a_{02} & \dots & a_{0n} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$\square$

PŘÍKLAD 13.17. *Určete neparametrickou (obecnou) rovnici roviny určené body* $A = [1, 0, 3]$, $B = [2, 4, -1]$, $C = [0, 3, 8]$.

Věta 35 (Obecná rovnice nadroviny). *Souřadnice každého bodu* $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ *nadroviny* A_{n-1} *prostoru* A_n *splňují neparametrickou (obecnou) rovnici*

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + c_0 = 0, \tag{13}$$

zkráceně ve tvaru

$$\sum_{i=1}^{n} c_ix_i + c_0 = 0, \tag{14}$$

kde $c_1, c_2, \ldots, c_n, c_0$ *jsou algebraické doplňky po řadě prvků* $x_1, x_2, \ldots, x_n, 1$ *prvního řádku determinantu* (12) *z věty 34.*

(Pech:AGLÚ/str.33 - V.6.2)

Důsledky:

1) Každá rovnice ve tvaru $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i + c_0 = 0$ je rovnicí A_{n-1}, pokud je alespoň jedno $c_i \neq 0$.

2) V prostoru A_2 je nadrovinou **přímka**. Nechť $p = \leftrightarrow AB$; $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$. Potom

$$p: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; ax + by + c = 0.$$

3) V prostoru A_3 je nadrovinou **rovina**. Nechť $\rho = (ABC)$; $A = [a_1, a_2, a_3]$, $B = [b_1, b_2, b_3]$, $C = [c_1, c_2, c_3]$. Potom

$$\rho: \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; ax + by + cz + d = 0.$$

Věta 36. *Je-li* $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i + c_0 = 0$ *rovnicí nadroviny, pak rovnice* $k\left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i + c_0\right) = 0$ *je obecnou rovnicí téže nadroviny ve stejné soustavě souřadné, když* $k \neq 0$ *je libovolné reálné číslo.*

(Pech:AGLÚ/str.34 - V.6.3)

PŘÍKLAD 13.18. *Napište obecnou rovnici roviny určené třemi body* $A = [1, 1, -1]$, $B = [3, 2, 0]$, $C = [4, 4, -3]$.

PŘÍKLAD 13.19. *Napište obecnou rovnici roviny určené bodem* $A = [2, 1, -2]$ *a směry vektorů* $\vec{u} = (3, 2, 4)$, $\vec{v} = (3, 5, 2)$.

Řešení:

$$\begin{vmatrix} x - a_1 & y - a_2 & z - a_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

PŘÍKLAD 13.20. *Určete parametrické rovnice roviny*

$$2x - y + 3z - 1 = 0.$$