9.8 Neparametrická (obecná) rovnice nadroviny

Množina všech řešení soustavy m lineárních rovnic o n neznámých

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

je **afinní podprostor prostoru** A_n, jehož dimenze je $k = n - h$, kde $h = h(A) = h(A^*)$. Naopak, každý afinní podprostor A_k dimenze k lze popsat soustavou $n - k$ nezávislých rovnic. Konkrétně nás v tuto chvíli zajímá skutečnost, že **každou nadrovinu lze popsat jednou lineární rovnicí**, které říkáme **neparametrická** nebo **obecná rovnice** nadroviny. Jednou rovnicí proto, že dimenze nadroviny je $n - 1$ a je-li $k = n - 1 = n - h$, musí být $h = 1$.

PŘÍKLAD 9.16. *Přímka je nadrovinou prostoru A_2. Uvažujme přímku $p = [A, B]$; $A = [-5, 3]$, $B = [2, 4]$. Určete obecnou rovnici přímky p.*

Řešení: Z parametrických rovnic přímky

$$\begin{aligned} p:\ \ x &= -5 + 7t \\ y &= 3 + t;\ \ t \in R \end{aligned}$$

vyloučíme parametr t. Výsledkem bude rovnice bez parametru - neparametrická (obecná) rovnice přímky:

$$x - 7y + 26 = 0.$$

PŘÍKLAD 9.17. *Určete obecnou (neparametrickou) rovnici nadroviny prostoru A_3.*

Řešení: Nadrovina prostoru A_3 je určena třemi nezávislými body A, B, C; $A = [a_1, a_2, a_3]$, $B = [b_1, b_2, b_3]$, $C = [c_1, c_2, c_3]$. Potom ji můžeme vyjádřit vektorově parametrickou rovnicí:

$$X = A + t_1(B - A) + t_2(C - A).$$

Po jejím přepsání do tvaru

$$t_0(X - A) + t_1(B - A) + t_2(C - A) = \vec{o}$$

je zřejmé, že vektory $X - A$, $B - A$ a $C - A$ jsou **lineárně závislé**. Z toho plyne tvrzení následující věty.

Věta 37. *Budiž nadrovina A_{n-1} určena n lineárně nezávislými body $A_0, A_1, ..., A_{n-1}$, které mají v bodovém prostoru A_n souřadnice $A_i = [a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}]$, $i = 0, 1, ..., n-1$. Každý bod nadroviny $X = [x_1, x_2, ..., x_n]$ splňuje rovnici*

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & 1 \\ a_{01} & a_{02} & \dots & a_{0n} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n} & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{22}$$

zvanou **neparametrická (obecná) rovnice nadroviny**.

(Pech:AGLÚ/str.31 - V.6.1)

Důkaz. Myšlenka důkazu je uvedena před větou 37. Zbývá jenom ukázat, že platí ekvivalence

$$\begin{vmatrix} x_1 - a_{01} & x_2 - a_{02} & \dots & x_n - a_{0n} \\ a_{11} - a_{01} & a_{12} - a_{02} & \dots & a_{1n} - a_{0n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} - a_{01} & a_{n-1,2} - a_{02} & \dots & a_{n-1,n} - a_{0n} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & 1 \\ a_{01} & a_{02} & \dots & a_{0n} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

□

PŘÍKLAD 9.18. *Určete neparametrickou (obecnou) rovnici roviny určené body $A = [1, 0, 3]$, $B = [2, 4, -1]$, $C = [0, 3, 8]$.*

Věta 38 (Obecná rovnice nadroviny)**.** *Souřadnice každého bodu $X = [x_1, x_2, ..., x_n]$ nadroviny A_{n-1} prostoru A_n splňují neparametrickou (obecnou) rovnici*

$$c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n + c_0 = 0, \tag{23}$$

zkráceně ve tvaru

$$\sum_{i=1}^{n} c_ix_i + c_0 = 0, \tag{24}$$

kde $c_1, c_2, ..., c_n, c_0$ jsou algebraické doplňky po řadě prvků $x_1, x_2, ..., x_n, 1$ prvního řádku determinantu (22) z věty 37.

(Pech:AGLÚ/str.33 - V.6.2)

Důsledky:

1) Každá rovnice ve tvaru $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i + c_0 = 0$ je rovnicí A_{n-1}, pokud je alespoň jedno $c_i \neq 0$.

2) V prostoru A_2 je nadrovinou **přímka**. Nechť $p =\leftrightarrow AB$; $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$. Potom

$$p: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; ax + by + c = 0.$$

3) V prostoru A_3 je nadrovinou **rovina**. Nechť $\rho = (ABC)$; $A = [a_1, a_2, a_3]$, $B = [b_1, b_2, b_3]$, $C = [c_1, c_2, c_3]$. Potom

$$\rho: \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; ax + by + cz + d = 0.$$

Věta 39. *Je-li $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i + c_0 = 0$ rovnicí nadroviny, pak rovnice $k\left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i + c_0\right) = 0$ je obecnou rovnicí téže nadroviny ve stejné soustavě souřadné, když $k \neq 0$ je libovolné reálné číslo.*

(Pech:AGLÚ/str.34 - V.6.3)

PŘÍKLAD 9.19. *Napište obecnou rovnici roviny určené třemi body $A = [1, 1, -1]$, $B = [3, 2, 0]$, $C = [4, 4, -3]$.*

PŘÍKLAD 9.20. *Napište obecnou rovnici roviny určené bodem $A = [2, 1, -2]$ a směry vektorů $\vec{u} = (3, 2, 4)$, $\vec{v} = (3, 5, 2)$.*

Řešení:

$$\begin{vmatrix} x - a_1 & y - a_2 & z - a_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

PŘÍKLAD 9.21. *Určete parametrické rovnice roviny*

$$2x - y + 3z - 1 = 0.$$