9.9 Vzájemná poloha afinních bodových podprostorů

PŘÍKLAD 9.22. *Vyšetřete vzájemnou polohu přímek* $p = [A; \vec{u}]$, $q = [B; \vec{v}]$:

a) $A = [1, 2, 3]$, $\vec{u} = (1, -3, 2)$, $B = [0, 5, 1]$, $\vec{v} = (-2, 6, -4)$.

b) $A = [1, -3, 4]$, $\vec{u} = (2, 2, -1)$, $B = [3, 0, -1]$, $\vec{v} = (0, 1, 3)$.

PŘÍKLAD 9.23. *Určete vzájemnou polohu přímky* $p = [A; \vec{u}]$ *a roviny* $\rho = [B; \vec{v}, \vec{w}]$:

a) $A = [1, 2, 1]$, $\vec{u} = (1, 1, 2)$, $B = [2, 1, -2]$, $\vec{v} = (0, 2, -1)$, $\vec{w} = (3, -1, 2)$.

b) $A = [1, 0, 0]$, $\vec{u} = (7, 7, 1)$, $B = [0, 1, 3]$, $\vec{v} = (1, 3, 1)$, $\vec{w} = (2, -1, -1)$.

Definice 22 (Vzájemné polohy afinních bodových podprostorů)**.** *Dva afinní bodové podprostory* $A_h = [A; V_h]$, $A_k = [A; V_k]$ *afinního bodového prostoru* A_n *se nazývají:*

a) **rovnoběžné***,* *jestliže* $V_h \subseteq\subseteq V_k$ *nebo* $V_k \subseteq\subseteq V_h$*, značíme* $A_h || A_k$*,*

b) **incidentní***,* $A_h \subseteq\subseteq A_k$ *nebo* $A_k \subseteq\subseteq A_h$*,*

c) **různoběžné***, jestliže* $A_h \cap A_k \neq \emptyset$ *a zároveň* A_h*,* A_k **nejsou incidentní***,*

d) **mimoběžné***, jestliže* A_h*,* A_k **nejsou ani rovnoběžné, ani různoběžné***.*

(Pech:AGLÚ/str.37 - D.7.1)

9.10 Rovnoběžné afinní bodové podprostory

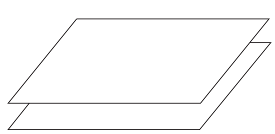
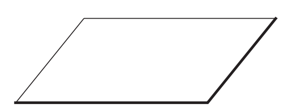
Rovnoběžné afinní bodové podprostory A_h, A_k značíme:

$$A_h || A_k$$

Naším cílem je formulovat obecný postup (algoritmus) určení takovýchto podprostorů - ten potom bude uveden ve větě 43

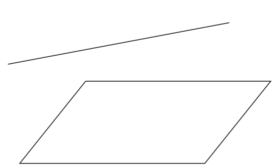
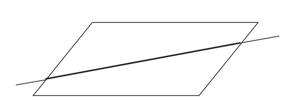
Věta 40 (Rovnoběžnost)**.** $A_h || A_k$

1) $h = k$:

$A_h \cap A_k = \emptyset$:  nebo $A_h = A_k$: 

TOTOŽNÉ

2) $h < k$:

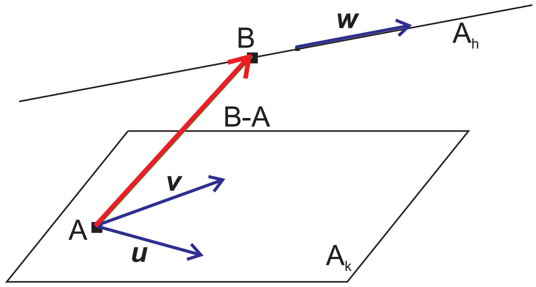
$A_h \cap A_k = \emptyset$:  nebo $A_h \subseteq\subseteq A_k$: 

INCIDENTNÍ

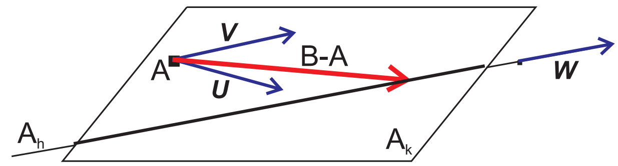
(Pech:AGLÚ/str.37 - V.7.1)

Věta 41 (Incidence)**.** $A_h || A_k$, $h \leq k$

$$\textit{Podprostory } A_h, A_k \textit{ jsou } \textbf{incidentní} \quad \Leftrightarrow \quad B - A \in V_k$$



$B - A \notin V_k$



$B - A \in V_k$

(Pech:AGLÚ/str.38 - V.7.2)

Poznámka. Incidentní podprostory jsou zároveň rovnoběžné. Mají-li stejnou dimenzi, nazýváme je **totožné** nebo **splývající** podprostory.

Věta 42 (Jednoznačnost)**.** *Bodem* $B \in A_n$ *prochází právě jeden podprostor* A'_k *rovnoběžný s daným podprostorem* A_k *téže dimenze.*

(Pech:AGLÚ/str.38 - V.7.3)

Věta 43 (Rovnoběžnost a incidence)**.** *Dva bodové podprostory, dané parametricky*

$$X = A + \sum_{i=1}^{h} t_i \vec{u}_i, \qquad Y = B + \sum_{j=1}^{k} r_j \vec{v}_j, \quad h \leq k,$$

jsou **rovnoběžné***, právě když vektory* $\vec{u}_i$ *náleží do podprostoru* $[\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k]$ *, tj.*

$$\vec{u}_i \in [\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k] \, .$$

Jsou **incidentní***, jestliže současně do tohoto podprostoru patří i vektor* $B - A$*, tj.*

$$B - A \in [\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k] \, .$$

(Pech:AGLÚ/str.38 - V.7.4)

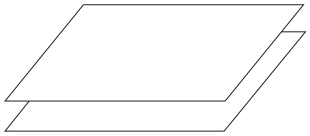
PŘÍKLAD 9.24. *Vyšetřete vzájemnou polohu přímky* p *a roviny* ρ *:*

a) $$p: \begin{aligned} x_1 &= 1 - t \\ x_2 &= 1 + 3t \\ x_3 &= -2, \end{aligned} \qquad \rho: \begin{aligned} x_1 &= 2 + r + 3s \\ x_2 &= 3 + 2r + s \\ x_3 &= 1 - r - 2s, \end{aligned}$$

b) $$p: \begin{aligned} x_1 &= 1 - t \\ x_2 &= 4 + 3t \\ x_3 &= -3 - 4t, \end{aligned} \qquad \rho: \begin{aligned} x_1 &= 3 + r + 3s \\ x_2 &= 3 + 2r + s \\ x_3 &= -r - 2s. \end{aligned}$$

PŘÍKLAD 9.25. *Rozhodněte o vzájemné poloze rovin* $\rho: \; x+y+2z-7=0, \quad \sigma: x+y+2z-5=0.$

Věta 44 (Rovnoběžnost nadrovin)**.**



$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + a_0 = 0$$

$$ka_1x_1+ka_2x_2+\ldots+ka_nx_n+b_0 = 0$$

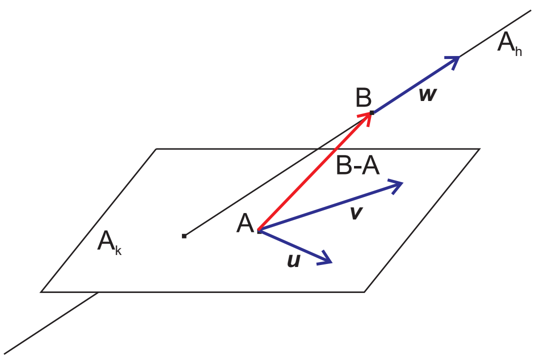
$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + a_0 = 0$$

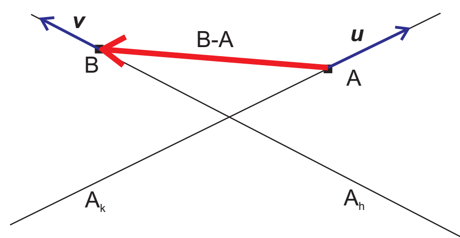
$$ka_1x_1+ka_2x_2+\ldots+ka_nx_n+ka_0 = 0$$

(Pech:AGLÚ/str.40 - V.7.5)

9.11 Různoběžné a mimoběžné podprostory

9.11.1 Různoběžné prostory

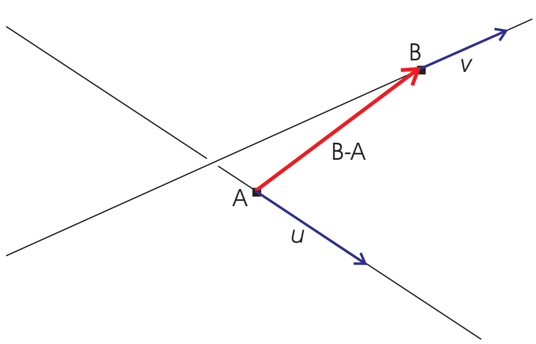




Je zřejmé, že $B - A \notin V_k$, $B - A \notin V_h$, ale v obou případech platí:

$$B - A \in V_h \bigvee V_k.$$

9.11.2 Mimoběžné prostory



Je zřejmé, že tentokrát platí: $B - A \notin V_k$, $B - A \notin V_h$, a zároveň:

$$B - A \notin V_h \bigvee V_k.$$

Spojení vektorových podprostorů $V_h \bigvee V_k$

Nechť $V_k = [\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_k\}]$, $V_h = [\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_h\}]$.
Potom

$$\dim(V_h \bigvee V_k) = \dim V_h + \dim V_k - \dim(V_h \cap V_k),$$

což můžeme stručně zapsat takto

$$s = h + k - p$$

a upravit na konečný tvar, který budeme dále používat při klasifikaci vzájemných poloh:

$$h + k = s + p.$$

Věta 45 (Průnik afinních bodových podprostorů). *Dva afinní bodové podprostory $A_h = [A; V_h]$, $A_k = [B; V_k]$ prostoru A_n mají společný aspoň jeden bod, právě když pro vektor $B - A$ platí:*

$$B - A \in V_s,$$

kde $V_s = V_h \bigvee V_k$.

PŘÍKLAD 9.26. *Určete souřadnice průsečíku přímky p s rovinou ρ :*
$p = [A; \vec{u}]$; $A = [1, 2, 1]$, $\vec{u} = (1, 1, 2)$;
$\rho = [B; \vec{v}, \vec{w}]$; $B = [2, 1, -2]$, $\vec{v} = (0, 2, -1)$, $\vec{w} = (3, -1, 2)$.

$\{[-1, 0, -3]\}$

PŘÍKLAD 9.27. *V afinním prostoru A_4 určete vzájemnou polohu roviny $\rho = [A; \vec{u}_1, \vec{u}_2]$ a nadroviny $A_3 = [B; \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3]$:* $A = [3, 3, -1, 3]$, $\vec{u}_1 = (0, 1, 1, 1)$, $\vec{u}_2 = (1, -2, -1, 0)$, $B = [1, 4, -6, 2]$, $\vec{v}_1 = (1, -1, 0, 1)$, $\vec{v}_2 = (0, 0, 2, -1)$, $\vec{v}_3 = (1, 0, 3, 1)$.