9.12 Spojení bodových podprostorů

Zajímají nás odpovědi na následující otázky:

Jaký nejmenší (dle dimenze) bodový podprostor je určen

a) dvěma body,

b) třemi nekolineárními body,

c) bodem a přímkou,

d) dvojicí přímek ?

Odpovědi na ně zobecníme v pojmu **spojení bodových podprostorů:**

$$A_g = A_h \bigvee A_k,$$

které můžeme chápat jako nejmenší podprostor prostoru A_n, který obsahuje podprostory A_h, A_k.

Definice 23 (Spojení bodových podprostorů)**.**

1) $A_h \subseteq\subseteq A_g$, $A_k \subseteq\subseteq A_g$

2) $\forall A', A' \subseteq\subseteq A_n, A_h \subseteq\subseteq A', A_k \subseteq\subseteq A' \Rightarrow A_g \subseteq\subseteq A'$

(Pech:AGLÚ/str. 41 - D.7.2)

Zaměření A_g

$$V_g = [\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_h, \vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k, B - A\}]$$

$$A_g = [A; V_g]$$

PŘÍKLAD 9.28. *Určete, jaký podprostor prostoru A_3 vznikne spojením dvou mimoběžných přímek.*

PŘÍKLAD 9.29. *Určete, jaký podprostor prostoru A_3 vznikne spojením roviny A_2 a přímky A_1 s ní rovnoběžné.*

Věta 46 (Dimenze spojení afinních bodových podprostorů)**.**

$A_h \cap A_k = \emptyset \Rightarrow g = s + 1 \qquad (B - A \notin V_s)$ *viz věta 45*

$A_h \cap A_k \neq \emptyset \Rightarrow g = s \qquad (B - A \in V_s)$

(Pech:AGLÚ/str. 42 - V.7.7)

PŘÍKLAD 9.30. *Určete dimenzi spojení rovin* $\left[A; \vec{t}, \vec{u}\right]$, $[B; \vec{v}, \vec{w}]$: $A = [3, 2, -1, 0]$, $\vec{t} = (2, -1, 3, 1)$, $\vec{u} = (0, -1, 3, -2)$, $B = [4, 2, 0, 0]$, $\vec{v} = (-2, -2, 0, 5)$, $\vec{w} = (-2, -1, 0, 1)$.

9.13 Klasifikace vzájemných poloh dvou bodových podprostorů

Problém: V jakém afinním bodovém prostoru A_n mohou existovat dvě mimoběžné roviny?

Použijeme toto značení:

$$A_h = [A; V_h]\,, \quad A_k = [B; V_k]\,, \quad h \le k \le n,$$

$$V_s = V_h \bigvee V_k, \quad V_p = V_h \cap V_k, \quad A_g = A_h \bigvee A_k.$$

Použijeme tyto vztahy:

$$h + k = s + p, \qquad n \ge g, \qquad g = s \text{ nebo } g = s + 1.$$

Zajímá nás vztah mezi n a k

Věta 47 (Vzájemné polohy dvou afinních bodových podprostorů)**.**

a) A_h, A_k **incidentní** $(A_h \subseteq\subseteq A_k) \Leftrightarrow V_h \subseteq\subseteq V_k \wedge B - A \in V_s$

$$\left.\begin{array}{r} V_h \subseteq\subseteq V_k \Rightarrow s = k \\ B - A \in V_s \Rightarrow g = s \end{array}\right\} \quad n \ge k$$

b) A_h, A_k **rovnoběžné různé** $\Leftrightarrow V_h \subseteq\subseteq V_k \wedge B - A \notin V_s$

$$\left.\begin{array}{r} V_h \subseteq\subseteq V_k \Rightarrow s = k \\ B - A \notin V_s \Rightarrow g = s + 1 \end{array}\right\} \quad n \ge k + 1$$

c) A_h, A_k **různoběžné** $\Leftrightarrow V_h \not\subseteq\not\subseteq V_k \wedge B - A \in V_s$

$$\left.\begin{array}{r} V_h \not\subseteq\not\subseteq V_k \Rightarrow h + k = s + p \\ B - A \in V_s \Rightarrow g = s \end{array}\right\} \quad g = h + k - p \Rightarrow n \ge h + k - p$$

d) A_h, A_k **mimoběžné** $\Leftrightarrow V_h \not\subseteq\not\subseteq V_k \wedge B - A \notin V_s$

$$\left.\begin{array}{r} V_h \not\subseteq\not\subseteq V_k \Rightarrow h + k = s + p \\ B - A \notin V_s \Rightarrow g = s + 1 \end{array}\right\} \quad g = h + k - p + 1 \Rightarrow n \ge h + k - p + 1$$

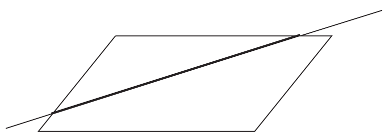
(Pech:AGLÚ/str. 43 - V.7.8)

9.14 Průnik bodových podprostorů

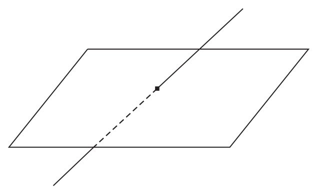
$$A_r = A_h \cap A_k$$

Dimenze **průniku bodových podprostorů** r nemusí být vždy stejná jako dimenze **průniku jejich zaměření** p.

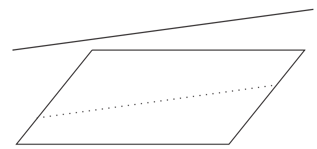
Věta 48 (Dimenze průniku bodových podprostorů)**.** *Pokud jsou bodové podprostory A_h, A_k incidentní, tj. $A_h \subseteq\subseteq A_k$ (nebo naopak $A_k \subseteq\subseteq A_h$), nebo jsou A_h, A_k různoběžné, potom je dimenze jejich průniku $A_h \cap A_k$ stejná jako dimenze průniku jejich zaměření $V_h \cap V_k$, tj. $r = p$.*



$r = p = 1$



$r = p = 0$



$A_r = \emptyset,\ p = 1$

(Pech:AGLÚ/str. 44 - V.7.9)

PŘÍKLAD 9.31. *Určete všechny možnosti vzájemné polohy přímky a roviny*

Řešení: Postupujeme podle následujícího schématu
(více viz **Pech:AGLÚ/str. 45**)

$$\begin{array}{ccccc}
h,\ k & \longrightarrow & p < h & \Longrightarrow & V_h \not\subseteq\not\subseteq V_k \\
 & \longrightarrow & p = h & \Longrightarrow & V_h \subseteq\subseteq V_k \\
 & \longrightarrow & g = s & \Longrightarrow & A_h \cap A_k \neq \emptyset \\
 & \longrightarrow & g = s + 1 & \Longrightarrow & A_h \cap A_k = \emptyset
\end{array}$$

$$h + k = s + p \quad \Longrightarrow \quad s = h + k - p$$

PŘÍKLAD 9.32. *Určete všechny možnosti vzájemné polohy dvou rovin A_h, A_k; $h = k = 2$.*

Řešení: viz **Pech:AGLÚ/str. 46**

PŘÍKLAD 9.33. *V afinním prostoru A_4 určete vzájemnou polohu rovin $\rho = \left[A; \vec{t}, \vec{u}\right]$, $\sigma = [B; \vec{v}, \vec{w}]$: $A = [4, 2, 2, 2]$, $\vec{t} = (1, 0, 0, -1)$, $\vec{u} = (1, 0, 3, 2)$, $B = [-2, -2, 2, 0]$, $\vec{v} = (-1, 0, 5, 0)$, $\vec{w} = (2, 2, 1, 0)$.*

9.15 Vzájemná poloha nadroviny a afinního bodového podprostoru

Vyjdeme z našich zkušeností s prostorem A_3 dimenze 3. Zde roli nadroviny hraje **rovina** a my bychom měli umět řešit úlohy, které se týkají:

- vzájemné polohy přímky a roviny,
- vzájemné polohy dvou rovin.

Věta 49. *Afinní bodový podprostor A_h je s každou nadrovinou A_{n-1} prostoru A_n buď* **rovnoběžný**, *nebo je jejich* **průnikem bodový podprostor dimenze** $h-1$.

(Pech:AGLÚ/str. 51 - V.7.10)

Důkaz. $h - 1 \leq p \leq h$ □

PŘÍKLAD 9.34. *Určete vzájemnou polohu přímky p a roviny ρ v A_3 :*
$p: \; x = 2 + 4t, \; y = -1 + t, \; z = 2 - t; \; t \in R,$
$\rho: \; 4x + y - z + 13 = 0.$

PŘÍKLAD 9.35. *Rozhodněte, jakou vzájemnou polohu mají roviny ρ, σ v A_3 :*
$\rho: \; 2x + 5y - 6z + 4 = 0, \quad \sigma: \; 3y + 3z - 6 = 0.$

Věta 50 (Vztah dvou nadrovin)**.** *Dvě nadroviny jsou buď rovnoběžné, nebo je jejich průnikem afinní bodový podprostor dimenze $n-2$.*

(Pech:AGLÚ/str. 52 - V.7.11)

Důkaz. vyjdeme z věty 49 $\longrightarrow h = n - 1$ □

PŘÍKLAD 9.36. *Napište parametrické rovnice přímky p, která je průsečnicí rovin* $\rho: \; 5x + y + 2z - 29 = 0$, $\sigma: \; 3x - y + z - 10 = 0$.

K určení přímky v prostoru A_3 potřebujeme dvě roviny. Kolik nadrovin prostoru A_n potřebujeme k určení jeho podprostoru A_k?

$$\left.\begin{aligned} \underline{a_1x_1 + a_2x_2} + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n + a_0 &= 0 \\ b_1x_1 + \underline{b_2x_2} + b_3x_3 + \ldots + b_nx_n + b_0 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{prostor řešení} : A_{n-2}$$

$$\left.\begin{aligned} \underline{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3} + a_4x_4 + \ldots + a_nx_n + a_0 &= 0 \\ b_1x_1 + \underline{b_2x_2 + b_3x_3} + b_4x_4 + \ldots + b_nx_n + b_0 &= 0 \\ c_1x_1 + c_2x_2 + \underline{c_3x_3} + c_4x_4 + \ldots + c_nx_n + c_0 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{prostor řešení} : A_{n-3}$$

Věta 51 (Určení A_k pomocí nadrovin)**.** *Ke každému afinnímu bodovému podprostoru $A_k \subseteq\subsetneq A_n$ existuje $n-k$ nadrovin, jejichž průnikem je A_k a které A_k určují.*
(Pech:AGLÚ/str. 53 - V.7.12)

Důkaz. Vyjdeme z parametrického vyjádření podprostoru A_k :

$$X = A + \sum_{i=1}^{k} t_i \vec{u}_i.$$

Vyloučením parametrů t_i z parametrických rovnic podprostoru A_k dostaneme $n-k$ obecných (neparametrických) rovnic. □

Věta 52. *Nechť v A_n je dáno $n-k$ nadrovin, které mají v A_n obecné rovnice takové, že matice jejich soustavy má hodnost $n-k$. Pak průnikem těchto nadrovin je afinní bodový podprostor $A_k \subseteq\subsetneq A_n$, který je jimi určen.*
(Pech:AGLÚ/str. 55 - V.7.13)

PŘÍKLAD 9.37. *V A_4 určete podprostor určený nadrovinami:*

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - 1 &= 0,\\ 2x_1 + x_3 - x_4 + 5 &= 0,\\ x_2 - x_3 + x_4 - 2 &= 0. \end{aligned}$$