13.9 Vzájemná poloha afinních bodových podprostorů

PŘÍKLAD 13.21. *Vyšetřete vzájemnou polohu přímek* $p = [A; \vec{u}]$, $q = [B; \vec{v}]$:

a) $A = [1, 2, 3]$, $\vec{u} = (1, -3, 2)$, $B = [0, 5, 1]$, $\vec{v} = (-2, 6, -4)$.

b) $A = [1, -3, 4]$, $\vec{u} = (2, 2, -1)$, $B = [3, 0, -1]$, $\vec{v} = (0, 1, 3)$.

PŘÍKLAD 13.22. *Určete vzájemnou polohu přímky* $p = [A; \vec{u}]$ *a roviny* $\rho = [B; \vec{v}, \vec{w}]$:

a) $A = [1, 2, 1]$, $\vec{u} = (1, 1, 2)$, $B = [2, 1, -2]$, $\vec{v} = (0, 2, -1)$, $\vec{w} = (3, -1, 2)$.

b) $A = [1, 0, 0]$, $\vec{u} = (7, 7, 1)$, $B = [0, 1, 3]$, $\vec{v} = (1, 3, 1)$, $\vec{w} = (2, -1, -1)$.

DEFINICE 22 (Vzájemné polohy afinních bodových podprostorů). *Dva afinní bodové podprostory* $A_h = [A; V_h]$, $A_k = [A; V_k]$ *afinního bodového prostoru* A_n *se nazývají:*

a) **rovnoběžné**, *jestliže* $V_h \subseteq\subseteq V_k$ *nebo* $V_k \subseteq\subseteq V_h$, *značíme* $A_h || A_k$,

b) **incidentní**, $A_h \subseteq\subseteq A_k$ *nebo* $A_k \subseteq\subseteq A_h$,

c) **různoběžné**, *jestliže* $A_h \cap A_k \neq \emptyset$ *a zároveň* A_h, A_k **nejsou incidentní**,

d) **mimoběžné**, *jestliže* A_h, A_k **nejsou ani rovnoběžné, ani různoběžné**.

(Pech:AGLÚ/str.37 - D.7.1)

13.10 Rovnoběžné afinní bodové podprostory

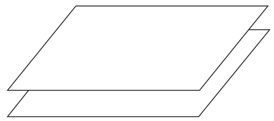
Rovnoběžné afinní bodové podprostory A_h, A_k značíme:

$$A_h || A_k$$

Naším cílem je formulovat obecný postup (algoritmus) určení takovýchto podprostorů - ten potom bude uveden ve větě 40

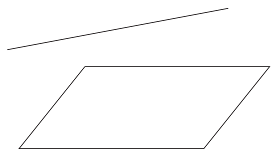
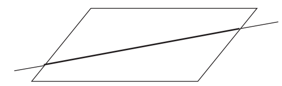
Věta 37 (Rovnoběžnost). $A_h || A_k$

1) $h = k$:

$A_h \cap A_k = \emptyset$:  nebo $A_h = A_k$: 

TOTOŽNÉ

2) $h < k$:

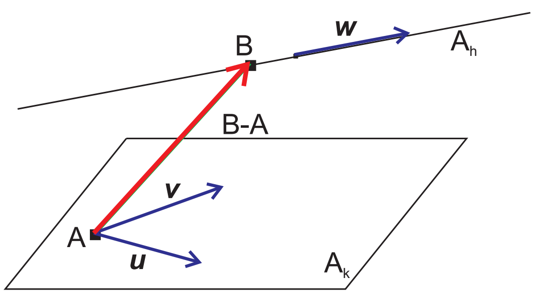
$A_h \cap A_k = \emptyset$:  nebo $A_h \subseteq\subseteq A_k$: 

INCIDENTNÍ

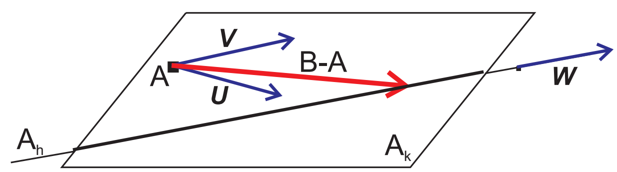
(Pech:AGLÚ/str.37 - V.7.1)

Věta 38 (Incidence). $A_h || A_k$, $h \leq k$

Podprostory A_h, A_k *jsou* **incidentní** $\quad \Leftrightarrow \quad B - A \in V_k$



$B - A \notin V_k$



$B - A \in V_k$

(Pech:AGLÚ/str.38 - V.7.2)

Poznámka. Incidentní podprostory jsou zároveň rovnoběžné. Mají-li stejnou dimenzi, nazýváme je **totožné** nebo **splývající** podprostory.

Věta 39 (Jednoznačnost). *Bodem* $B \in A_n$ *prochází právě jeden podprostor* A'_k *rovnoběžný s daným podprostorem* A_k *téže dimenze.*

(Pech:AGLÚ/str.38 - V.7.3)

Věta 40 (Rovnoběžnost a incidence). *Dva bodové podprostory, dané parametricky*

$$X = A + \sum_{i=1}^{h} t_i \vec{u}_i, \qquad Y = B + \sum_{j=1}^{k} r_j \vec{v}_j, \quad h \le k,$$

jsou **rovnoběžné**, *právě když vektory* $\vec{u}_i$ *náleží do podprostoru* $[\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k]$, *tj.*

$$\vec{u}_i \in [\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k] .$$

Jsou **incidentní**, *jestliže současně do tohoto podprostoru patří i vektor* $B - A$, *tj.*

$$B - A \in [\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k] .$$

(Pech:AGLÚ/str.38 - V.7.4)

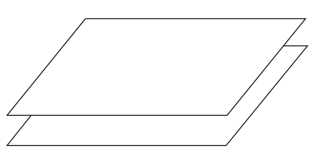
PŘÍKLAD 13.23. *Vyšetřete vzájemnou polohu přímky p a roviny ρ :*

a) $$p: \begin{aligned} x_1 &= 1 - t \\ x_2 &= 1 + 3t \\ x_3 &= -2, \end{aligned} \qquad \rho: \begin{aligned} x_1 &= 2 + r + 3s \\ x_2 &= 3 + 2r + s \\ x_3 &= 1 - r - 2s, \end{aligned}$$

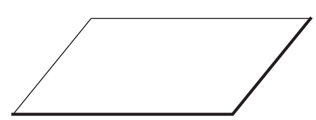
b) $$p: \begin{aligned} x_1 &= 1 - t \\ x_2 &= 4 + 3t \\ x_3 &= -3 - 4t, \end{aligned} \qquad \rho: \begin{aligned} x_1 &= 3 + r + 3s \\ x_2 &= 3 + 2r + s \\ x_3 &= -r - 2s. \end{aligned}$$

PŘÍKLAD 13.24. *Rozhodněte o vzájemné poloze rovin* $\rho: \ x + y + 2z - 7 = 0, \quad \sigma: \ x + y + 2z - 5 = 0.$

Věta 41 (Rovnoběžnost nadrovin).



$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n + a_0 = 0$$
$$ka_1x_1 + ka_2x_2 + ... + ka_nx_n + b_0 = 0$$

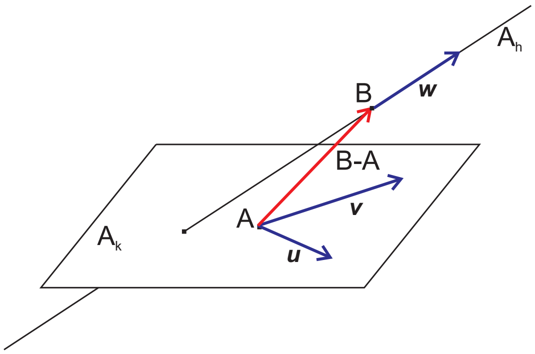


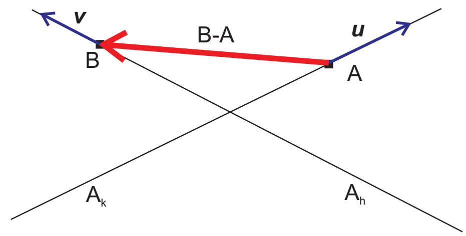
$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n + a_0 = 0$$
$$ka_1x_1 + ka_2x_2 + ... + ka_nx_n + ka_0 = 0$$

(Pech:AGLÚ/str.40 - V.7.5)

13.11 Různoběžné a mimoběžné podprostory

13.11.1 Různoběžné prostory

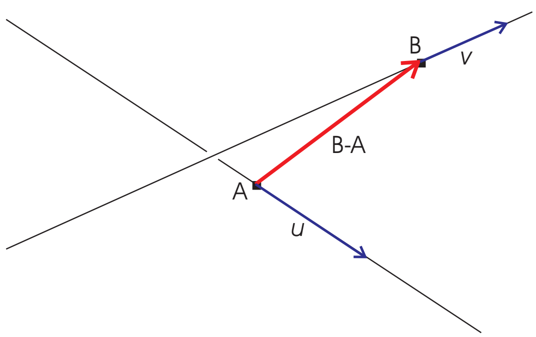




Je zřejmé, že $B - A \notin V_k$, $B - A \notin V_h$, ale v obou případech platí:

$$B - A \in V_h \bigvee V_k.$$

13.11.2 Mimoběžné prostory



Je zřejmé, že tentokrát platí: $B - A \notin V_k$, $B - A \notin V_h$, a zároveň:

$$B - A \notin V_h \bigvee V_k.$$

Spojení vektorových podprostorů $V_h \bigvee V_k$

Nechť $V_k = [\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_k\}]$, $V_h = [\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_h\}]$.
Potom

$$\dim(V_h \bigvee V_k) = \dim V_h + \dim V_k - \dim(V_h \cap V_k),$$

což můžeme stručně zapsat takto

$$s = h + k - p$$

a upravit na konečný tvar, který budeme dále používat při klasifikaci vzájemných poloh:

$$h + k = s + p.$$

Věta 42 (Průnik afinních bodových podprostorů). *Dva afinní bodové podprostory* $A_h = [A; V_h]$, $A_k = [B; V_k]$ *prostoru* A_n *mají společný aspoň jeden bod, právě když pro vektor* $B - A$ *platí:*

$$B - A \in V_s,$$

kde $V_s = V_h \bigvee V_k$.

PŘÍKLAD 13.25. *Určete souřadnice průsečíku přímky* p *s rovinou* ρ :
$p = [A; \vec{u}]$; $A = [1, 2, 1]$, $\vec{u} = (1, 1, 2)$;
$\rho = [B; \vec{v}, \vec{w}]$; $B = [2, 1, -2]$, $\vec{v} = (0, 2, -1)$, $\vec{w} = (3, -1, 2)$.

$\{[-1, 0, -3]\}$

PŘÍKLAD 13.26. *V afinním prostoru* A_4 *určete vzájemnou polohu roviny* $\rho = [A; \vec{u}_1, \vec{u}_2]$ *a nadroviny* $A_3 = [B; \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3]$: $A = [3, 3, -1, 3]$, $\vec{u}_1 = (0, 1, 1, 1)$, $\vec{u}_2 = (1, -2, -1, 0)$, $B = [1, 4, -6, 2]$, $\vec{v}_1 = (1, -1, 0, 1)$, $\vec{v}_2 = (0, 0, 2, -1)$, $\vec{v}_3 = (1, 0, 3, 1)$.

13.12 Spojení bodových podprostorů

Zajímají nás odpovědi na následující otázky:

Jaký nejmenší (dle dimenze) bodový podprostor je určen
a) dvěma body,
b) třemi nekolineárními body,
c) bodem a přímkou,
d) dvojicí přímek ?

Odpovědi na ně zobecníme v pojmu **spojení bodových podprostorů:**

$$A_g = A_h \bigvee A_k,$$

které můžeme chápat jako nejmenší podprostor prostoru A_n, který obsahuje podprostory A_h, A_k.

DEFINICE 23 (Spojení bodových podprostorů).

1) $A_h \subseteq\subseteq A_g,\ A_k \subseteq\subseteq A_g$

2) $\forall A', A' \subseteq\subseteq A_n,\ A_h \subseteq\subseteq A',\ A_k \subseteq\subseteq A' \Rightarrow A_g \subseteq\subseteq A'$

(Pech:AGLÚ/str. 41 - D.7.2)

Zaměření A_g

$$V_g = [\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_h, \vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k, B - A\}]$$

$$A_g = [A; V_g]$$

PŘÍKLAD 13.27. *Určete, jaký podprostor prostoru A_3 vznikne spojením dvou mimoběžných přímek.*

PŘÍKLAD 13.28. *Určete, jaký podprostor prostoru A_3 vznikne spojením roviny A_2 a přímky A_1 s ní rovnoběžné.*

Věta 43 (Dimenze spojení afinních bodových podprostorů).

$A_h \cap A_k = \emptyset \Rightarrow g = s + 1 \qquad (B - A \notin V_s)$ *viz věta 42*

$A_h \cap A_k \neq \emptyset \Rightarrow g = s \qquad (B - A \in V_s)$

(Pech:AGLÚ/str. 42 - V.7.7)

PŘÍKLAD 13.29. *Určete dimenzi spojení rovin* $\left[A; \vec{t}, \vec{u}\right], [B; \vec{v}, \vec{w}] : A = [3, 2, -1, 0],\ \vec{t} = (2, -1, 3, 1),\ \vec{u} = (0, -1, 3, -2),\ B = [4, 2, 0, 0],\ \vec{v} = (-2, -2, 0, 5),\ \vec{w} = (-2, -1, 0, 1)$.

13.13 Klasifikace vzájemných poloh dvou bodových podprostorů

Problém: V jakém afinním bodovém prostoru A_n mohou existovat dvě mimoběžné roviny?

Použijeme toto značení:

$$A_h = [A; V_h], \quad A_k = [B; V_k], \quad h \le k \le n,$$

$$V_s = V_h \bigvee V_k, \quad V_p = V_h \cap V_k, \quad A_g = A_h \bigvee A_k.$$

Použijeme tyto vztahy:

$$h + k = s + p, \qquad n \ge g, \qquad g = s \text{ nebo } g = s + 1.$$

Zajímá nás vztah mezi n a k

Věta 44 (Vzájemné polohy dvou afinních bodových podprostorů).

a) A_h, A_k **incidentní** *(*$A_h \subseteq\subseteq A_k$*)* $\Leftrightarrow V_h \subseteq\subseteq V_k \wedge B - A \in V_s$

$$\left.\begin{aligned} V_h \subseteq\subseteq V_k \Rightarrow s = k \\ B - A \in V_s \Rightarrow g = s \end{aligned}\right\} \quad n \ge k$$

b) A_h, A_k **rovnoběžné různé** $\Leftrightarrow V_h \subseteq\subseteq V_k \wedge B - A \notin V_s$

$$\left.\begin{aligned} V_h \subseteq\subseteq V_k \Rightarrow s = k \\ B - A \notin V_s \Rightarrow g = s + 1 \end{aligned}\right\} \quad n \ge k + 1$$

c) A_h, A_k **různoběžné** $\Leftrightarrow V_h \not\subseteq\not\subseteq V_k \wedge B - A \in V_s$

$$\left.\begin{aligned} V_h \not\subseteq\not\subseteq V_k \Rightarrow h + k = s + p \\ B - A \in V_s \Rightarrow g = s \end{aligned}\right\} \quad g = h + k - p \Rightarrow n \ge h + k - p$$

d) A_h, A_k **mimoběžné** $\Leftrightarrow V_h \nsubseteq\nsubseteq V_k \wedge B - A \notin V_s$

$$\left.\begin{array}{r} V_h \nsubseteq\nsubseteq V_k \Rightarrow h + k = s + p \\ B - A \notin V_s \Rightarrow g = s + 1 \end{array}\right\} \quad g = h + k - p + 1 \Rightarrow n \geq h + k - p + 1$$

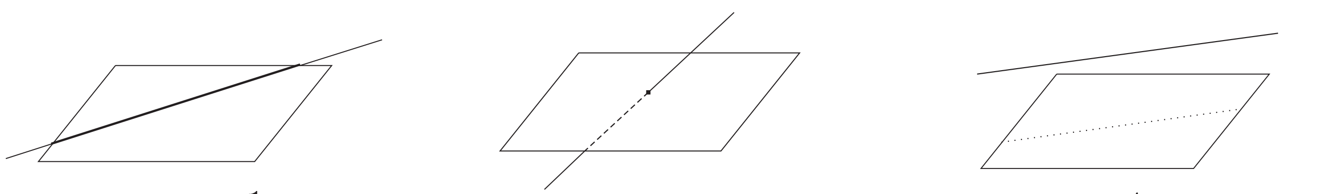
(Pech:AGLÚ/str. 43 - V.7.8)

13.14 Průnik bodových podprostorů

$$A_r = A_h \cap A_k$$

Dimenze **průniku bodových podprostorů** r nemusí být vždy stejná jako dimenze **průniku jejich zaměření** p.

Věta 45 (Dimenze průniku bodových podprostorů). *Pokud jsou bodové podprostory A_h, A_k incidentní, tj. $A_h \subseteq\subseteq A_k$ (nebo naopak $A_k \subseteq\subseteq A_h$), nebo jsou A_h, A_k různoběžné, potom je dimenze jejich průniku $A_h \cap A_k$ stejná jako dimenze průniku jejich zaměření $V_h \cap V_k$, tj. $r = p$.*



$r = p = 1$ $\qquad$ $r = p = 0$ $\qquad$ $A_r = \emptyset,\ p = 1$

(Pech:AGLÚ/str. 44 - V.7.9)

PŘÍKLAD 13.30. *Určete všechny možnosti vzájemné polohy přímky a roviny*

Řešení: Postupujeme podle následujícího schématu
(více viz **Pech:AGLÚ/str. 45**)

$$\begin{array}{ccccc} h,\, k & \longrightarrow & p < h & \Longrightarrow & V_h \nsubseteq\nsubseteq V_k \\ & \longrightarrow & p = h & \Longrightarrow & V_h \subseteq\subseteq V_k \\ & \longrightarrow & g = s & \Longrightarrow & A_h \cap A_k \neq \emptyset \\ & \longrightarrow & g = s + 1 & \Longrightarrow & A_h \cap A_k = \emptyset \end{array}$$

$$h + k = s + p \quad \Longrightarrow \quad s = h + k - p$$

PŘÍKLAD 13.31. *Určete všechny možnosti vzájemné polohy dvou rovin* A_h, A_k; $h = k = 2$.

Řešení: viz **Pech:AGLÚ/str. 46**

PŘÍKLAD 13.32. *V afinním prostoru* A_4 *určete vzájemnou polohu rovin* $\rho = [A; \vec{t}, \vec{u}]$, $\sigma = [B; \vec{v}, \vec{w}]$: $A = [4, 2, 2, 2]$, $\vec{t} = (1, 0, 0, -1)$, $\vec{u} = (1, 0, 3, 2)$, $B = [-2, -2, 2, 0]$, $\vec{v} = (-1, 0, 5, 0)$, $\vec{w} = (2, 2, 1, 0)$.

13.15 Vzájemná poloha nadroviny a afinního bodového podprostoru

Vyjdeme z našich zkušeností s prostorem A_3 dimenze 3. Zde roli nadroviny hraje **rovina** a my bychom měli umět řešit úlohy, které se týkají:

- vzájemné polohy přímky a roviny,
- vzájemné polohy dvou rovin.

Věta 46. *Afinní bodový podprostor* A_h *je s každou nadrovinou* A_{n-1} *prostoru* A_n *buď* **rovnoběžný**, *nebo je jejich* **průnikem bodový podprostor dimenze** $h - 1$.

(Pech:AGLÚ/str. 51 - V.7.10)

Důkaz. $h - 1 \leq p \leq h$ □

PŘÍKLAD 13.33. *Určete vzájemnou polohu přímky* p *a roviny* ρ *v* A_3 :

$p: \; x = 2 + 4t, \; y = -1 + t, \; z = 2 - t; \; t \in R,$

$\rho: \; 4x + y - z + 13 = 0.$

PŘÍKLAD 13.34. *Rozhodněte, jakou vzájemnou polohu mají roviny* ρ, σ *v* A_3 :

$\rho: \; 2x + 5y - 6z + 4 = 0, \qquad \sigma: \; 3y + 3z - 6 = 0.$

Věta 47 (Vztah dvou nadrovin). *Dvě nadroviny jsou buď rovnoběžné, nebo je jejich průnikem afinní bodový podprostor dimenze $n-2$.*

(Pech:AGLÚ/str. 52 - V.7.11)

Důkaz. vyjdeme z věty 46 $\longrightarrow h = n-1$ □

PŘÍKLAD 13.35. *Napište parametrické rovnice přímky p, která je průsečnicí rovin $\rho:\ 5x+y+2z-29=0$, $\sigma:\ 3x-y+z-10=0$.*

K určení přímky v prostoru A_3 potřebujeme dvě roviny. Kolik nadrovin prostoru A_n potřebujeme k určení jeho podprostoru A_k?

$$\left.\begin{array}{r} \underline{a_1x_1+a_2x_2}+a_3x_3+\ldots+a_nx_n+a_0=0 \\ b_1x_1+\underline{b_2x_2}+b_3x_3+\ldots+b_nx_n+b_0=0 \end{array}\right\}\text{prostor řešení : } A_{n-2}$$

$$\left.\begin{array}{r} \underline{a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3}+a_4x_4+\ldots+a_nx_n+a_0=0 \\ b_1x_1+\underline{b_2x_2+b_3x_3}+b_4x_4+\ldots+b_nx_n+b_0=0 \\ c_1x_1+c_2x_2+\underline{c_3x_3}+c_4x_4+\ldots+c_nx_n+c_0=0 \end{array}\right\}\text{prostor řešení : } A_{n-3}$$

Věta 48 (Určení A_k pomocí nadrovin). *Ke každému afinnímu bodovému podprostoru $A_k \subseteq\subseteq A_n$ existuje $n-k$ nadrovin, jejichž průnikem je A_k a které A_k určují.*

(Pech:AGLÚ/str. 53 - V.7.12)

Důkaz. Vyjdeme z parametrického vyjádření podprostoru A_k :

$$X = A + \sum_{i=1}^{k} t_i\vec{u}_i.$$

Vyloučením parametrů t_i z parametrických rovnic podprostoru A_k dostaneme $n-k$ obecných (neparametrických) rovnic. □

Věta 49. *Nechť v A_n je dáno $n-k$ nadrovin, které mají v A_n obecné rovnice takové, že matice jejich soustavy má hodnost $n-k$. Pak průnikem těchto nadrovin je afinní bodový podprostor $A_k \subseteq\subseteq A_n$, který je jimi určen.*

(Pech:AGLÚ/str. 55 - V.7.13)

PŘÍKLAD 13.36. *V A_4 určete podprostor určený nadrovinami:*

$$x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - 1 = 0,$$
$$2x_1 + x_3 - x_4 + 5 = 0,$$
$$x_2 - x_3 + x_4 - 2 = 0.$$