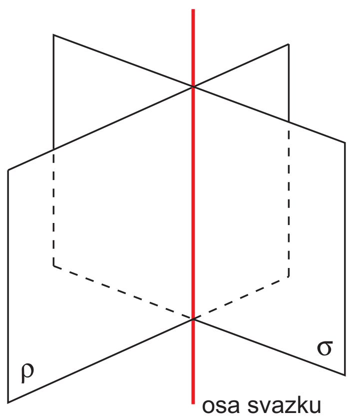
9.17 Svazek nadrovin

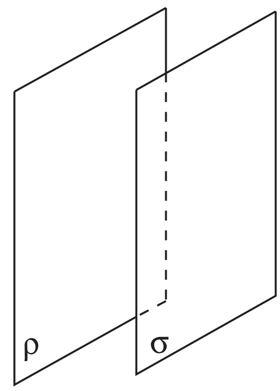
PŘÍKLAD 9.40. *Rozhodněte o vzájemné poloze rovin* ρ, σ :

a) $\rho:\ 2x+3y-z+1=0,\ \sigma:\ x+y+2z-3=0,$

b) $\rho:\ 2x+3y-z+1=0,\ \sigma:\ 4x+6y-2z+5=0,$



Svazek rovin 1. druhu



Svazek rovin 2. druhu
(osnova rovin)

Problém
Jak vypadají rovnice dalších rovin patřících do uvedených svazků?
Jak souvisejí s rovnicemi daných „určujících“ rovin?

Řešením je rovnice ve tvaru lineární kombinace obecných rovnic rovin „určujících“ svazek:

ad a)

$$\lambda_1(2x+3y-z+1)+\lambda_2(x+y+2z-3)=0$$

ad b)

$$\lambda_1(2x+3y-z+1)+\lambda_2(4x+6y-2z+5)=0$$

Úkol: Vymyslete, jaké máme požadavky na koeficienty λ_1, λ_2. Liší se nějak podle druhu svazku?

Definice 25 (Svazek nadrovin)**.** *Množinu všech nadrovin z* A_n*, jejichž průnikem je afinní bodový podprostor dimenze* $n-2$*, nazveme* **svazkem nadrovin prvého druhu**. *Množinu všech navzájem rovnoběžných nadrovin nazveme* **svazkem nadrovin druhého druhu (osnovou nadrovin)**.

(Pech:AGLÚ/str. 66 - D.9.1)

Věta 53 (Rovnice svazku nadrovin 1. druhu)**.** *Jsou-li*

$$L_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a_0 = 0, \quad L_2 = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + b_0 = 0$$

rovnice různoběžných nadrovin v A_n v téže soustavě souřadné, pak rovnice

$$\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 = 0$$

je rovnicí svazku nadrovin prvého druhu, jsou-li λ_1, λ_2 libovolná reálná čísla, z nichž aspoň jedno je různé od nuly.

(Pech:AGLÚ/str. 66 - V.9.1)

Věta 54 (Rovnice svazku nadrovin 2. druhu)**.** *Jsou-li*

$$L_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a_0 = 0, \quad L_2 = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + b_0 = 0$$

rovnice rovnoběžných nadrovin v A_n v téže soustavě souřadné, pak rovnice

$$\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 = 0$$

je rovnicí svazku nadrovin druhého druhu, jsou-li λ_1, λ_2 libovolná reálná čísla, která nejsou řešením soustavy $\lambda_1 a_i + \lambda_2 b_i = 0;\ i = 1, 2, \ldots, n$.

(Pech:AGLÚ/str. 67 - V.9.2)

PŘÍKLAD 9.41 (Svazek tří nadrovin)**.** *Rozhodněte, zda roviny L_1, L_2, L_3 náleží témuž svazku:*

$$L_1 :\ 2x + 3y - z + 1 = 0, \quad L_2 :\ x + y + 2z - 3 = 0, \quad L_3 :\ x - 2y + z + 5 = 0.$$

Odvoďte obecné kritérium pro určení, zda tři různé nadroviny $L_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a_0 = 0$, $L_2 = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + b_0 = 0$, $L_3 = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + c_0 = 0$ náleží témuž svazku nadrovin.

Poznámka. Uvažujme matice koeficientů

$$M_1 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n & a_0 \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n & b_0 \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_n & c_0 \end{bmatrix}, \qquad M_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_n \end{bmatrix}$$

a jejich hodnosti označme takto

$$h(M_1) = h', \qquad h(M_2) = h.$$

Potom můžeme pomocí těchto hodností určit **druh svazku**, který tvoří uvažované nadroviny:

i) jestliže $h' = h = 2$, potom se jedná o **svazek nadrovin prvého druhu**,

ii) jestliže $h' = 2,\ h = 1$, potom se jedná o **svazek nadrovin druhého druhu**.

PŘÍKLAD 9.42. *Rozhodněte, zda roviny L_1, L_2, L_3 náleží témuž svazku:*

$$L_1 :\ x - 2y + 5z - 1 = 0, \quad L_2 :\ -3x + 6y - 15z + 5 = 0, \quad L_3 :\ 2x - 4y + 10z + 9 = 0.$$

9.17.1 Svazky přímek v A_2

Dle definice odpovídá svazku přímek prvního druhu (zkráceně hovoříme o svazku přímek) množina všech přímek, které mají společný jeden bod (tzv. střed svazku). Svazku přímek druhého druhu (zkráceně hovoříme o osnově přímek) pak odpovídá množina všech navzájem rovnoběžných přímek.

PŘÍKLAD 9.43. *Rozhodněte, zda přímky a, b, c patří do téhož svazku:*

$$a: \ 2x + y + 2 = 0, \quad b: \ 5x - 3y + 27 = 0, \quad c: \ x - 6y + 27 = 0.$$

Poznámka. Můžeme využít i determinant matice M_1.

PŘÍKLAD 9.44. *Svazek přímek je určen přímkami* $a: \ x + 2y - 5 = 0$, $b: \ 3x - 2y + 1 = 0$. *Určete rovnici přímky svazku, která*

a) prochází bodem $A = [2, -1]$,

b) je rovnoběžná s přímkou $p: \ y - 1 = 0$.

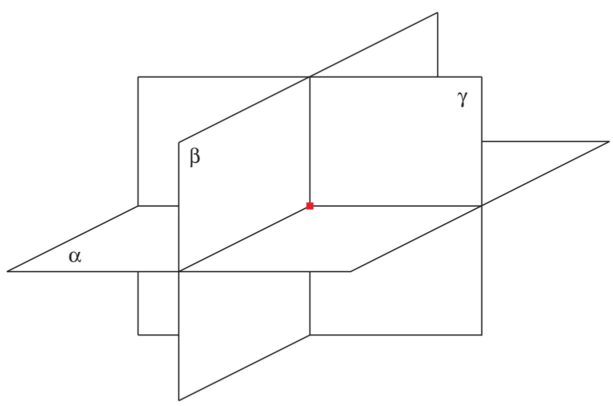
9.17.2 Svazky rovin v A_3

Svazek je určen dvěma základními rovinami.

PŘÍKLAD 9.45. *Rovina je určena bodem* $M = [2, -1, 3]$ *a průsečnicí rovin o rovnicích* $6x + 2y - z - 3 = 0$, $3x + 4y - 2z - 2 = 0$. *Napište její rovnici.*

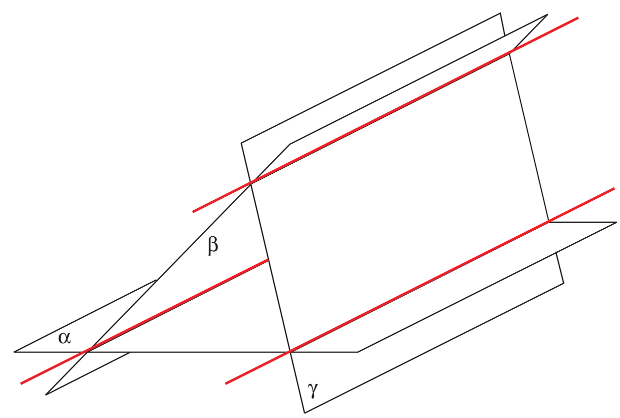
9.18 Trs nadrovin

K definici trsu nadrovin nás dovede hledání odpovědi na otázku: „co tvoří nadroviny, které nenáleží témuž svazku?“



$\alpha \cap \beta \cap \gamma = A_{n-3}$

Trs (nad)rovin 1. druhu



$V^\alpha \cap V^\beta \cap V^\gamma = V_{n-2}$

Trs (nad)rovin 2. druhu

Věta 55 (Vzájemná poloha tří nadrovin)**.** *Tři nadroviny α, β, γ afinního bodového prostoru A_n, které nenáleží témuž svazku nadrovin prvého nebo druhého druhu, mají právě jednu z těchto vzájemných poloh:*
1) jejich průnikem je bodový podprostor A_{n-3},
2) průnik nadrovin je prázdný, přitom průnikem jejich zaměření je vektorový podprostor V_{n-2}.

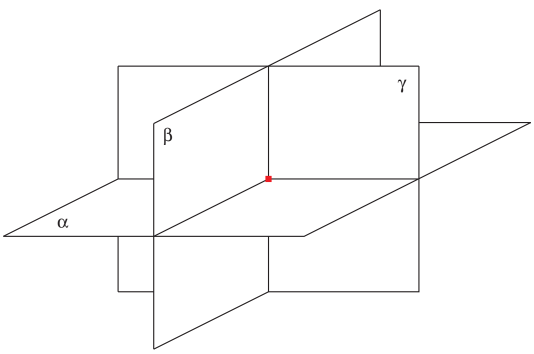
(Pech:AGLÚ/str. 73 - V.10.1)

Definice 26 (Trs nadrovin)**.** *Množinu všech nadrovin v A_n, jejichž průnikem je afinní bodový podprostor dimenze $n-3$, nazýváme* **trs nadrovin prvého druhu**. *Množinu všech nadrovin, jejichž zaměření obsahuje podprostor V_{n-2} prostoru A_n, nazveme* **trs nadrovin druhého druhu**.

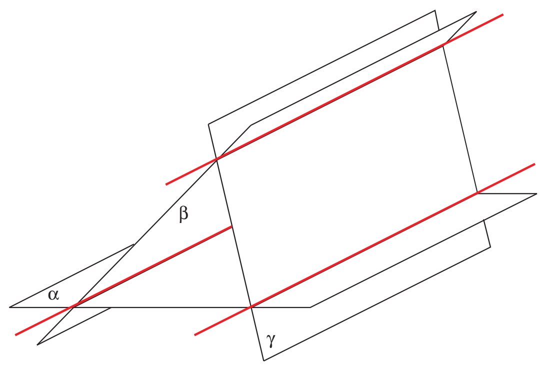
(Pech:AGLÚ/str. 73 - D.10.1)

Poznámka. V prostoru A_2 je nadrovinou přímka. Z definice vyplývá, že neexistuje trs přímek prvého druhu. Trs přímek druhého druhu je pak tvořen všemi přímkami v rovině. Zdůvodněte.

9.18.1 Trs rovin v A_3



Trs rovin 1. druhu



Trs rovin 2. druhu

V každém trsu 1. druhu existuje nekonečně mnoho svazků rovin 1. druhu.

V každém trsu rovin 2.druhu existuje nekonečně mnoho svazků rovin 2. druhu i nekonečně mnoho svazků 1. druhu.

PŘÍKLAD 9.46 (Průnik tří nadrovin)**.** *Vymyslete, jak z hodností matic M_1, M_2 příslušejících třem nadrovinám L_1, L_2, L_3 poznáme, zda tyto nadroviny náležejí nějakému svazku nebo zda tvoří trs, a potom jaký?*

9.18.2 Rovnice trsu nadrovin

Věta 56 (Rovnice trsu 1. druhu)**.** *Nechť průnikem nadrovin L_1, L_2, L_3 je bodový podprostor dimenze $n-3$. Pak rovnice*

$$\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3 = 0$$

je rovnicí trsu nadrovin prvého druhu, jsou-li λ_1, λ_2, λ_3 libovolná reálná čísla, z nichž aspoň jedno je nenulové.

(Pech:AGLÚ/str. 75 - V.10.3)

Věta 57 (Rovnice trsu 2. druhu)**.** *Nechť průnik nadrovin L_1, L_2, L_3 je prázdný a průnik jejich zaměření je vektorový prostor dimenze $n-2$. Potom*

$$\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3 = 0$$

je rovnicí trsu nadrovin druhého druhu, jsou-li λ_1, λ_2, λ_3 reálná čísla, která nejsou řešením soustavy $\lambda_1 a_i + \lambda_2 b_i + \lambda_3 c_i = 0$; $i = 1, 2, ..., n$.

(Pech:AGLÚ/str. 76 - V.10.4)

PŘÍKLAD 9.47 (Trs čtyř nadrovin)**.** *Vyslovte kritérium pro určení, zda čtyři nadroviny L_1, L_2, L_3, L_4 náleží témuž trsu nadrovin.*

Poznámka. Uvažujme opět matice koeficientů

$$M_1 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n & a_0 \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n & b_0 \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n & c_0 \end{bmatrix}, \qquad M_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{bmatrix}$$

a jejich hodnosti označme takto

$$h(M_1) = h', \qquad h(M_2) = h.$$

Potom můžeme pomocí těchto hodností určit **druh trsu**, který tvoří uvažované nadroviny:

i) jestliže $h' = h = 3$, potom nadroviny vytváří **trs prvého druhu**,

ii) jestliže $h' = 3,\ h = 2$, potom nadroviny tvoří **trs druhého druhu**.