# 1 Shodná zobrazení v rovině

## 1.1 Transformace roviny - afinní zobrazení

Transformací roviny na sebe rozumíme zobrazení $f$, které každému bodu $X$ roviny $E_2$ přiřadí bod $X' = f(X)$ téže roviny. Nejprve nás budou zajímat jenom afinní zobrazení. Důležitým pojmem při jejich zavedení je pojem dělicí poměr.

### 1.1.1 Dělicí poměr

Dělicím poměrem zde rozumíme číslo, které jednoznačně udává polohu bodu na přímce vzhledem ke dvěma pevně daným bodům této přímky.


Obrázek 1: Tři kolineární body

**DEFINICE 1 (Dělicí poměr).** *Nechť $A, B, C$; $A \neq B$, $C \neq B$, jsou tři body ležící na přímce (tj. tři kolineární body). Dělicím poměrem bodu $C$ vzhledem k bodům $A$, $B$ rozumíme reálné číslo $\lambda$, které zapisujeme $(ABC)$, a pro jehož absolutní hodnotu platí*

$$|(ABC)| = \frac{|AC|}{|BC|}, \tag{1}$$

*přitom pro bod $C$ ležící vně úsečky $AB$ je $(ABC) > 0$ a pro bod $C$ ležící uvnitř $AB$ je $(ABC) < 0$. Pro $C = A$ je zřejmě $(ABC) = 0$.*

**Poznámka.** Uvedená definice zavádí dělicí poměr pomocí podílu vzdáleností bodu $C$ od daných bodů $A$, $B$. Protože vzdálenosti jsou kladné, nepřináší jejich podíl žádnou informaci o znaménku dělicího poměru, kterému pak musí být věnována zvláštní část definice. Tomu se vyhneme, pokud použijeme k zavedení pojmu dělicí poměr odpovídající vektory definované příslušnou trojicí bodů, viz Obr..


Obrázek 2: Dělicí poměr bodu C vzhledem k bodům A, B

**DEFINICE 2 (Dělicí poměr 2).** *Nechť $A, B, C$; $A \neq B$, $C \neq B$, jsou tři body ležící na přímce (tj. tři kolineární body). Potom číslo $\lambda$ definované rovnicí*

$$C - A = \lambda(C - B) \tag{2}$$

*značíme $(ABC)$ a nazýváme dělicím poměrem bodu $C$ vzhledem k bodům $A, B$.*

**Poznámka.** Ve vztahu (2) je obsažena kompletní informace o čísle $\lambda$, tj. o jeho absolutní hodnotě i o znaménku. Pro snazší zapamatování si můžeme (2) přepsat do tvaru

$$\lambda = \frac{C - A}{C - B},$$

který sice není formálně správně, ale jasně koresponduje se vztahem (1). Smysl získá až dosazením souřadnic bodů $A = [a_1; a_2]$, $B = [b_1; b_2]$, $C = [c_1; c_2]$ :

$$\lambda = \frac{c_1 - a_1}{c_1 - b_1} = \frac{c_2 - a_2}{c_2 - b_2}.$$

**PŘÍKLAD 1.1.** *Určete dělicí poměr $(ABS)$ středu $S$ úsečky $AB$ vzhledem k jejím krajním bodům $A$, $B$.*

**PŘÍKLAD 1.2.** *V rovině jsou dány dva pevné body $A$, $B$. Určete množinu všech bodů $X$ této roviny, pro které platí*

$$\frac{|AC|}{|BC|} = konst.$$

**Poznámka.** Uvedené skutečnosti nás mohou přivést k možnosti vyjádření polohy bodu nezávisle na volbě soustavy souřadnic. Bod $C$ můžeme, při zvolených bodech $A$, $B$, zapsat takto:

$$C = \frac{1}{1-\lambda}A - \frac{\lambda}{1-\lambda}B.$$

Jedná se o příklad tzv. barycentrických souřadnic.

### 1.1.2 Afinní zobrazení

Pojem afinní zobrazení známe z 1. ročníku. Obecným vlastnostem a definici tohoto typu zobrazení se budeme věnovat ještě na konci tohoto semestru. Zde nám bude stačit, když si připomeneme, že afinní je takové zobrazení, které zachovává dělicí poměr.

## 1.2 Definice a vlastnosti shodného zobrazení

**DEFINICE 3.** *Zobrazení v rovině, které každým dvěma bodům $X, Y$ přiřazuje body $X', Y'$ tak, že*

$$|X'Y'| = |XY|$$

*se nazývá* **shodné zobrazení** *v rovině (též izometrické zobrazení).*

**Poznámka.** Můžeme též říci, že shodné zobrazení zachovává vzdálenost bodů, tj. pro shodné zobrazení $f : X \longrightarrow f(X)$ platí:

$$|f(X)f(Y)| = |XY|.$$

**PŘÍKLAD 1.3.** *Je dána přímka $p$ a body $A, B$ v téže polorovině s hraniční přímkou $p$. Najděte všechny body $X \in p$ takové, že součet vzdáleností $|AX| + |BX|$ je minimální.*

**Věta 1.** *Každé shodné zobrazení je* **prosté** *a* **afinní***.*

**Další vlastnosti shodných zobrazení:**

1) **úsečka** se zobrazí **na úsečku**,
2) **polopřímka** se zobrazí **na polopřímku**,
3) **přímka** se zobrazí **na přímku**,
4) **rovnoběžky** se zobrazí **na rovnoběžky**,
5) **úhel** se zobrazí **na úhel s ním shodný**,
6) **polorovina** se zobrazí **na polorovinu**.

**PŘÍKLAD 1.4.** *V euklidovské rovině* $E_2$ *je zvolena kartézská soustava souřadnic. Určete, pro které hodnoty čísel* $a$, $b$ *existuje shodné zobrazení roviny* $E_2$ *do sebe, zobrazující body* $[0, 0]$, $[2, 1]$, $[4, a]$ *po řadě na body* $[1, 2]$, $[3, 1]$, $[5, b]$*? Je toto shodné zobrazení určeno jednoznačně?*

**Věta 2 (O určenosti shodného zobrazení v rovině 1).** *Shodné zobrazení v rovině je jednoznačně určeno libovolnými třemi nekolineárními body* $X, Y, Z$ *a třemi nekolineárními body* $X', Y', Z'$*, které jsou po řadě jejich obrazy.*

**Poznámka.** Stejná věta platí pro afinní zobrazení.