## 1.3 Osová souměrnost

**DEFINICE 4.** *Nechť je dána přímka o, tzv.* **osa souměrnosti.** *Je-li* $M$ *libovolný bod na ose* $o$*, pak je jeho obraz* $M' \equiv M$*. Ke každému bodu* $X$*, který neleží na přímce* $o$*, sestrojíme obraz* $X'$ *takto; bodem* $X$ *vedeme kolmici* $k$ *na přímku* $o$ *a její patu označíme* $X_0$*. Na polopřímce opačné k polopřímce* $X_0X$ *sestrojíme bod* $X'$ *tak, že* $|X'X_0| = |XX_0|$*.*

**Poznámka.** Osová souměrnost je příkladem involutorního zobrazení (involuce).

**Věta 3.** *Osová souměrnost je shodné zobrazení.*

Později, při klasifikaci shodností, využijeme jejich definice pomocí samodružných bodů a směrů.

**Věta 4.** *Shodné zobrazení, jehož všechny samodružné body vyplní přímku* $o$*, je souměrnost podle osy* $o$*.*

**Věta 5.** *Jestliže existují na přímce dva různé samodružné body, pak každý bod této přímky je samodružný.*

**Věta 6.** *Má-li shodnost aspoň tři nekolineární samodružné body, je to identita.*

**Věta 7.** *Má-li shodnost dva různé samodružné body a není identitou, pak je osovou souměrností.*

**Věta 8.** *Samodružné přímky osové souměrnosti jsou přímky kolmé na osu souměrnosti.*

### 1.3.1 Analytické vyjádření osové souměrnosti $\mathbf{O}(o)$ v rovině

**PŘÍKLAD 1.5.** *Napište analytické vyjádření osové souměrnosti s osou v souřadnicové ose* $x$ *(*$y$*).*

Osová souměrnost podle osy $o$ v obecné poloze

Obecná rovnice osy $o: ax + by + c = 0$
Osová souměrnost $\mathbf{O}(o)$:

$$x' = x - \frac{2a}{a^2+b^2}(ax+by+c)$$
$$y' = y - \frac{2b}{a^2+b^2}(ax+by+c)$$

**PŘÍKLAD 1.6.** *V eukleidovské rovině je dána souměrnost podle přímky* $p: 3x - 4y + 1 = 0$*. Napište rovnice této souměrnosti.*

### 1.3.2 Úlohy

**1.** Napište rovnice souměrnosti podle přímky $o: 2x - 3y + 1 = 0$. [**1**]

**2.** Napište rovnice osové souměrnosti, zobrazující počátek na bod $[1, 5]$. [**1**]

**3.** Je dána přímka $p$ a dvě kružnice $k_1$, $k_2$ oddělené přímkou $p$. Sestrojte rovnostranný trojúhelník tak, aby na každé z kružnic $k_1$, $k_2$ byl jeden vrchol a jedna z výšek ležela na přímce $p$. [**1**]

**4.** Sestrojte trojúhelník $ABC$, je-li dán obvod $o = 12cm$ a úhly $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$. [**2**]

**5.** Je dán rovnoramenný trojúhelník $ABC$ ($AB$ je základna). Dokažte, že součet vzdáleností každého bodu $X$ základny od přímek $AC$ a $BC$ je konstantní. [**1**]

**6.** Jsou dány dvě různoběžky $p$, $q$ a bod $A$ mimo ně. Najděte body $B \in p$, $C \in q$ tak, aby obvod trojúhelníku $ABC$ byl minimální. [**2**]

**7.** Jsou dány tři různé přímky $p_1$, $p_2$, $p_3$, procházející bodem $S$; na přímce $p_1$ je dán bod $A \neq S$. Sestrojte trojúhelník $ABC$, jehož osy vnitřních úhlů leží v přímkách $p_1$, $p_2$, $p_3$. [**2**]

**8.** Jsou dány tři přímky $o_1$, $o_2$, $o_3$ procházející bodem $O$. Na $o_1$ dán bod $A_1$. Sestrojte $\triangle ABC$ tak, aby $o_1$, $o_2$, $o_3$ byly osami jeho stran a bod $A_1$ středem strany $BC$. [**2**]

**9.** Jsou dány body $X$, $Y$ a přímka $p$, která je odděluje. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník $ABC$, jehož hlavním vrcholem je bod $C$, osou souměrnosti přímka $p$ a jehož ramena mají danou velikost $a$. Přímka $AC$ nechť prochází bodem $X$ a přímka $BC$ bodem $Y$. [**1**]

**10.** Je dána přímka $p$ a body $A$, $B$, ležící ve stejné polorovině s hraniční přímkou $p$. Sestrojte bod $X \in p$ tak, aby $|\angle AXp| = 2|\angle BXp|$. [**3**]

**11.** Jsou dány body $A$, $B$, $C$ a přímka $p$ kolmá k přímce $AB$ tak, že prochází bodem $C$ a body $A$, $B$ leží v téže polorovině určené přímkou $p$. Sestrojte na přímce $p$ takový bod $X$, aby z něho byla vidět úsečka $AB$ pod stejným úhlem jako úsečka $BC$. [**3**]

**12.** Obrazy středu $S$ kružnice opsané trojúhelníku $ABC$ v osových souměrnostech podle přímek $BC$, $AC$, $AB$ jsou vrcholy trojúhelníku $A_1B_1C_1$. Dokažte, že je tento trojúhelník shodný s trojúhelníkem $ABC$. [**2**]

**13.** Sestrojte konvexní čtyřúhelník $ABCD$ se stranami dané velikosti, je-li $\mapsto AC$ osou vnitřního úhlu při vrcholu $A$. [**2**]

**14.** Sestrojte čtverec $ABCD$, je-li dáno $a + e = 10cm$. [**1**]

**15.** Sestrojte obdélník $ABCD$, je-li dáno $e = 7cm$, $a - b = 1cm$. [**2**]

**16.** Sestrojte lichoběžník $ABCD$ ($AB||CD$), je-li dáno $b = 3cm$, $c = 2.5cm$, $d = 2.6cm$, $\alpha - \beta = 20°$. [**2**]

**17. Mascheroniova konstrukce.** Je dána kružnice $k(S; r)$; dále je dána dvěma body $A$, $B$ (body neleží na kružnici) její sečna $p$, která neprochází středem $S$. Sestrojte průsečíky přímky $p$ s kružnicí $k$, aniž přitom použijete pravítka. [**3**]

**18.** Dokažte, že body souměrně sdružené s průsečíkem výšek podle stran trojúhelníka, leží na kružnici trojúhelníku opsané. [**3**]