1.4 Otočení

Shodnost, která není ani identitou ani osovou souměrností, má nejvýše jeden samodružný bod

DEFINICE 5. *Shodnost s jedním samodružným bodem S nazýváme* **otočením** *(též* **rotací***); bod S je tzv.* **střed otočení.**

Věta 9. *Složením dvou osových souměrností s různoběžnými osami vznikne otočení, jehož středem je průsečík těchto os.*

Věta 10. *Každé otočení lze složit ze dvou osových souměrností, jejichž osy jsou různoběžky procházející středem otočení. Jednu z těchto os lze volit libovolně tak, že prochází středem otočení. Druhá je touto volbou určena jednoznačně.*

Věta 11. *Otočení se středem S a úhlem velikosti α převádí přímku p v přímku p' různoběžnou s p; přitom dva vrcholové úhly, které p a p' tvoří, mají velikost α.*

1.4.1 Analytické vyjádření otočení (rotace) $\mathbf{R}(S, \alpha)$ v rovině

Souřadnice středu: $S = [s_1, s_2]$

$$\begin{aligned} x' &= (x - s_1)\cos\alpha - (y - s_2)\sin\alpha + s_1 \\ y' &= (x - s_1)\sin\alpha + (y - s_2)\cos\alpha + s_2 \end{aligned}$$

Po úpravě dostaneme:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha + s_1 - s_1\cos\alpha + s_2\sin\alpha \\ y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha + s_2 - s_1\sin\alpha - s_2\cos\alpha \end{aligned}$$

PŘÍKLAD 1.7. *Afinní zobrazení euklidovské roviny na sebe zobrazuje vrchol A trojúhelníku ABC na bod B, bod B na bod C a bod C na bod A. Může to být zobrazení shodné? Jestliže ano, napište jeho rovnice vzhledem k vhodně zvolené kartézské soustavě souřadnic.*

1.4.2 Úlohy

19. Jsou dány dvě shodné úsečky AB, CD. Určete otočeení, které zobrazí A na C a B na D. [**2**]

20. Je dána kružnice $k(S;r)$ a bod $P \neq S$. Bodem P veďte přímku, na které kružnice vytíná úsečku dané velikosti d. [**1**]

21. Při odvalování kružnice po přímce se body soustavy spojené s kružnicí pohybují po trajektoriích, kterým se říká **cykloidy**. Rozlišujeme tři typy cykloid, v závislosti na tom, zda bod leží vně, na nebo uvnitř kružnice. Zobrazte tyto křivky pomocí programu Maple. [**3**]

22. Jsou dány různé rovnoběžné přímky a, b, c a bod A, který leží na přímce a. Sestrojte všechny rovnostranné trojúhelníky ABC, jejichž vrcholy B, C leží po řadě na přímkách b, c. [**1**]

23. Jsou dány dvě rovnoběžné přímky a, b a mimo ně bod C. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC tak, aby jeho vrcholy A, B ležely po řadě na přímkách a, b. [**1**]

24. Je dána kružnice $k(S; 3cm)$ a bod A ($|SA| = 1.5cm$). Sestrojte všechny tětivy XY kružnice k o délce $5.5cm$, které procházejí bodem A. [**2**]

25. Je dána kružnice $k(S;r)$, bod B a úsečka délky d ($d < 2r$). Sestrojte tětivu XY kružnice k délky d tak, aby byla vidět z bodu B pod úhlem $60°$. [**2**]

26. Jsou dány kružnice k, přímka p a bod A ležící vně k. Sestrojte rovnostranný trojúhelník s vrcholem v bodě A tak, aby zbývající vrcholy ležely na k a na p. [**1**]

1.5 Středová souměrnost

DEFINICE 6. *Středovou souměrností rozumíme rotaci* $\mathbf{R}(S, \pi)$.

Vlastnosti středové souměrnosti:

1) Lze ji rozložit na dvě osové souměrnosti, jejichž osy jsou navzájem kolmé a procházejí středem souměrnosti S; jedna z os je volitelná.

2) Vznikne složením libovolných dvou osových souměrností, jejichž osy jsou k sobě kolmé.

3) Je jednoznačně určena svým středem

4) Je to involuce.

Věta 12. *V souměrnosti podle středu S je obrazem každé přímky přímka s ní rovnoběžná. Přímka, která prochází středem S je samodružná.*

1.5.1 Analytické vyjádření středové souměrnosti $\mathbf{S}(S)$ v rovině

Souřadnice středu: $S = [s_1, s_2]$

$$\begin{aligned} x' &= -x + 2s_1 \\ y' &= -y + 2s_2 \end{aligned}$$

Věta 13. *Každá shodnost v rovině se dá složit z nejvýše tří osových souměrností.*

1.5.2 Úlohy

27. Je dána kružnice $k(O;r)$ a přímka p, která má od středu O vzdálenost $v > 0$; dále je dán bod S, který leží uvnitř poloroviny pO. Sestrojte úsečku se středem S, která má krajní body K, P po řadě na kružnici k a na přímce p. [**1**]

28. Je dána kružnice $k(S,r)$. Bodem P, který leží vně kružnice k, veďte přímku p, která protíná kružnici v bodech A, B tak, že A je středem úsečky BP. [**2**]

29. Vepište danému rovnoběžníku $ABCD$ čtverec $XYUV$ tak, aby na každé straně rovnoběžníku ležel jeden vrchol čtverce. [**1**]

30. Je dán úhel AVB a bod S jeho vnitřku. Sestrojte na rameni VA bod X a na rameni VB bod Y tak, aby bod S byl středem úsečky XY. [**1**]

31. Je dán úhel AVB a bod S jeho vnitřku. Sestrojte na rameni VA bod X a na rameni VB bod Y tak, aby XYS byl rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník s přeponou XY. [**1**]

32. Je dána úsečka AA_1 ($|AA_1| = 5cm$). Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, pro které je AA_1 těžnicí t_a a pro které platí: $c = 4cm, b = 7cm$. [**2**]

33. Je dána úsečka AA_1 ($|AA_1| = 5cm$). Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, pro které je AA_1 těžnicí t_a a pro které platí: $\gamma = 45°, \beta = 60°$. [**1**]

34. Jsou dány dvě kružnice k_1, k_2, které se protínají ve dvou bodech Q a R. Bodem Q veďte přímku, která vytíná na obou kružnicích tětivy stejné délky. [**1**]

35. Je dán trojúhelník ABC a jeho vnitřní bod M. Sestrojte všechny úsečky XY se středem M a s krajními body X, Y na hranici trojúhelníku. [**1**]

36. Je dána úsečka AA_1; $|AA_1| = 4.5cm$. Sestrojte všechny pravoúhlé trojúhelníky ABC s pravým úhlem při vrcholu C, v nichž AA_1 je těžnicí t_a a $t_b = 6cm$. [**1**]

1.6 Posunutí (Translace)

DEFINICE 7. *Shodnost, která vznikne složením dvou osových souměrností s rovnoběžnými a různými osami, nazýváme* **posunutím** *(též* **translací***).*

Věta 14. *Posunutí (translace) nemá žádný samodružný bod a zobrazuje přímku do přímky s ní rovnoběžné.*

Věta 15. *Nechť X' je obraz libovolného (proměnného) bodu X v dané translaci $\mathbf{T}$. Pak všechny přímky XX' jsou navzájem rovnoběžné a všechny úsečky XX' jsou navzájem shodné.*

Věta 16. *Každou translaci lze složit ze dvou osových souměrností s rovnoběžnými osami z nichž jednu lze volit libovolně, kolmo na směr translace a druhá je touto volbou určena jednoznačně.*

1.6.1 Analytické vyjádření posunutí (translace) $\mathbf{T}(\vec{p})$ v rovině

Souřadnice vektoru posunutí: $\vec{p} = [p_1, p_2]$

$$\begin{aligned} x' &= x + p_1 \\ y' &= y + p_2 \end{aligned}$$

1.6.2 Úlohy

37. Jsou dány přímka p a dvě nesoustředné kružnice $k_1(S_1, r_1)$, $k_2(S_2, r_2)$. Veďte přímku rovnoběžnou s přímkou p tak, aby na ní kružnice k_1, k_2 vytínaly shodné tětivy. [**1**]

38. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, jehož úhlopříčky svírají pravý úhel, jsou-li dány velikosti úhlopříček $|AC| = e$, $|BD| = f$ a velikosti úhlů $|\angle ABC| = 90°$, $|\angle ADC| = \delta$. [**2**]

39. Sestrojte lichoběžník, jsou-li dány velikosti jeho stran a, b, c, d. [**1**]

40. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, jsou-li dány velikosti jeho stran $|AB| = a, |BC| = b, |CD| = c, |DA| = d$ a odchylka ω přímek AD, BC. [**2**]

41. Sestrojte rovnoběžník, jsou-li dány délky jeho stran a velikost úhlu jeho úhlopříček. [**1**]

42. Sestrojte lichoběžník $ABCD$, jsou-li dány délky obou jeho základen a, c a obou jeho úhlopříček e, f. [**1**]

43. Jsou dány dvě různoběžky a, b a úsečka délky r. Sestrojte všechny kružnice k se středem na přímce a, poloměrem r, které na přímce b vytínají tětivu délky r. [**1**]