1.8 Shodnosti přímé a nepřímé

Věta 19.
a) Přímou shodnost lze rozložit v sudý počet osových souměrností, nepřímou shodnost v lichý počet osových souměrností.
b) Složíme-li **dvě shodnosti přímé** *nebo* **dvě shodnosti nepřímé**, *dostaneme* **shodnost přímou**; *složíme-li* **shodnost přímou a nepřímou**, *vznikne* **shodnost nepřímá**.

Věta 20 (O určenosti shodného zobrazení 2). *Buďte ABC, KLM dva trojúhelníky; pak existuje jediná shodnost, která převádí bod A v bod K, polopřímku AB v polopřímku KL a polorovinu ABC v polorovinu KLM.*

1.9 Grupa shodností v rovině

Dokažte:

1. Složením (v libovolném pořadí) translace $\mathcal{T}$ a rotace $\mathcal{R}$, která není středovou souměrností, vznikne rotace téhož smyslu i úhlu jako $\mathcal{R}$.

2. Složením dvou translací vznikne translace nebo identita.

3. Složením translace a středové souměrnosti v libovolném pořádku vznikne středová souměrnost.

4. Složením středové souměrnosti $\mathcal{S}_1$ se středem S_1 a středové souměrnosti $\mathcal{S}_2$ se středem $S_2 \neq S_1$ vznikne translace $\mathcal{T}(S_1 \to S_2')$, přičemž úsečka S_1S_2' má střed S_2. Je-li $S_1 \equiv S_2$ je $\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2$ identita.

PŘÍKLAD 1.10. *Trojúhelník ABC byl převeden otočením daného smyslu se středem S a úhlem velikosti $\omega = 120^\circ$ v trojúhelník $A_1B_1C_1$, který byl dále převeden posunutím $\mathcal{T}(A_1 \to A_2)$ v trojúhelník $A_2B_2C_2$. Určete otočení, které převádí přímo $\triangle ABC$ v $\triangle A_2B_2C_2$.*

PŘÍKLAD 1.11. *Je dán rovnostranný trojúhelník ABC. Najděte všechny shodnosti, které převádějí tento trojúhelník do něho samého. Zkoumejte vlastnosti množiny těchto shodností spolu s operací skládání shodností.*

DEFINICE 9. *Množinu* **G** *zobrazení nazýváme* **grupou**, *má-li tyto vlastnosti:*
1. Složením dvou libovolných zobrazení z množiny **G** *vznikne opět zobrazení z množiny* **G**.
2. Obsahuje-li množina **G** *určité zobrazení, obsahuje i zobrazení k němu inverzní.*

Věta 21.
a) Všechny shodnosti v rovině tvoří grupu $\mathbf{G_S}$.
b) Všechny přímé shodnosti tvoří podgrupu $\mathbf{G'_S}$ grupy $\mathbf{G_S}$.
c) Množina všech translací doplněná identitou, tvoří grupu, která je podgrupou grupy přímých shodností.
d) Množina všech translací a středových souměrností, doplněná identitou, tvoří podgrupu grupy $\mathbf{G'_S}$.

1.10 Klasifikace shodností roviny

DEFINICE 10 (Afinní prostor). *Mějme dánu neprázdnou množinu A, vektorový prostor V_n dimenze n a zobrazení ψ množiny $A \times A$ do prostoru V_n. Trojici (A, V_n, ψ) nazýváme n-rozměrný afinní prostor, jestliže platí:*
1. Pro každé $X, Y, Z \in A$ je $\psi(X,Y) + \psi(Y,Z) = \psi(X,Z)$.
2. Existuje $P \in A$ tak, že zobrazení ψ_P množiny A do V_n, přiřazující každému $x \in A$ vektor $\psi(P,X)$, je vzájemně jednoznačné.

DEFINICE 11 (Afinní zobrazení). *Zobrazení f afinního prostoru A do afinního prostoru A' se nazývá afinní, jestliže má tuto vlastnost: Leží-li navzájem různé body B, C, D z prostoru A na přímce, pak jejich obrazy $f(B), f(C), f(D)$ buď splývají, nebo jsou navzájem různé, leží na jedné přímce a jejich dělící poměr se rovná dělícímu poměru jejich vzorů, tj.:*

$$(f(B), f(C); f(D)) = (B, C; D).$$

Každé afinní zobrazení f afinní roviny A_2 do sebe je vzhledem k libovolně zvolené lineární soustavě souřadnic dáno rovnicemi:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x' & = & a_{11}x & + & a_{12}y & + & b_1 \\ y' & = & a_{21}x & + & a_{22}y & + & b_2 \end{array}$$

1.10.1 Asociovaný homomorfismus

Místo homomorfismus říkáme též lineární zobrazení.

DEFINICE 12 (Homomorfismus). *Zobrazení φ vektorového prostoru V do vektorového prostoru V' se nazývá homomorfismus (lineární zobrazení), jestliže pro všechna $u, v \in V$, $k \in \mathbb{T}$ (místo obecného tělesa $\mathbb{T}$ můžeme uvažovat $\mathbb{R}$) platí:*

$$\begin{array}{lll} 1. & \varphi(u+v) & = \varphi(u) + \varphi(v), \\ 2. & \varphi(ku) & = k\varphi(u). \end{array}$$

DEFINICE 13 (Asociovaný homomorfismus zobrazení f). *Uvažujme afinní zobrazení f prostoru A do prostoru A', např. $f: E_2 \to E_2$. Potom* **asociovaným** *(tj. jednoznačně přiřazeným)* **homomorfismem** *afinního zobrazení f rozumíme lineární zobrazení φ, které zobrazuje zaměření V prostoru A do zaměření V' prostoru A' následujícím způsobem:*
Nechť

$$u = Y - X, \quad \text{kde} \quad X, Y \in A \quad \text{a} \quad u \in V,$$

potom

$$\varphi(u) = f(Y) - f(X), \quad \text{kde} \quad f(X), f(Y) \in A' \quad \text{a} \quad \varphi(u) \in V'.$$

ÚKOL: Ukažte, že se skutečně jedná o lineární zobrazeni v duchu definice 12

Věta 22 (O jednoznačném určení φ). *Ke každému afinnímu zobrazení f prostoru A je jednoznačně přiřazen (asociován) homomorfismus φ zaměření V prostoru A do zaměření V' prostoru A' takový, že:*

$$\varphi(B - A) = f(B) - f(A).$$

Důkaz. Ukážeme, že výsledek tohoto homomorfismu nezávisí na umístění vektoru, pouze na zobrazení f. □

Věta 23 (O jednoznačném určení f). *Zobrazení f je jednoznačně určeno, je-li dán homomorfismus φ a obraz $f(P)$ jednoho bodu P:*

$$f(X) = f(P) + \varphi(u).$$

Důkaz. $\varphi(X - P) = f(X) - f(P) \longrightarrow f(X) = f(P) + \varphi(X - P)$ □

1.10.2 Shodná zobrazení v rovině

Víme, že každé shodné zobrazení f v rovině můžeme zapsat soustavou rovnic

$$\begin{aligned} f:\ x' &= a_{11}x + a_{12}y + b_1 \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + b_2, \end{aligned}$$

kterou přepíšeme užitím matic do tvaru

$$f:\ \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

a stručně vyjádříme rovnicí

$$f:\ X' = A \cdot X + B. \tag{3}$$

Potom je zřejmé, že **asociovaný homomorfismus** φ takovéhoto shodného zobrazení f je dán soustavou

$$\begin{aligned} \varphi:\ u_1' &= a_{11}u_1 + a_{12}u_2 \\ u_2' &= a_{21}u_1 + a_{22}u_2, \end{aligned}$$

maticově pak

$$\varphi:\ \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix},$$

což lze zapsat, analogicky s rovnicí (3), ve tvaru

$$\varphi:\ u' = A \cdot u. \tag{4}$$

PROBLÉM: Rovnice (3) je rovnicí libovolné afinity v rovině. Máme-li dánu takovouto rovnici (soustavu), **jak poznáme, že se jedná o shodnost?**

Rovnice (3) je rovnicí shodnosti, právě když platí

$$A^T \cdot A = E, \tag{5}$$

(E je jednotková matice) jinak řečeno, když je matice A **ortonormální**.

Platí $A^T \cdot A = E$. Potom je ale $A^T = A^{-1}$ a platí tedy i rovnost $A \cdot A^T = E$.

Poznámka. Zobrazení, pro která platí $|\det A| = 1$ nazýváme ekviafinní zobrazení, stručně ekviafinity. Je zřejmé, že každá shodnost je ekviafinita. Platí toto tvrzení i obráceně? Můžeme říci, že každá ekviafinita je shodností?

Poznámka. Je třeba si uvědomit, že při shodném zobrazení mezi euklidovskými prostory různých dimenzí není matice A čtvercová. Potom výše uvedené úvahy o inverzní matici nemají smysl a v platnosti zůstává pouze původní podmínka $A^T \cdot A = E$.

Věta 24. *Afinní zobrazení f euklidovského prostoru E do euklidovského prostoru E' je právě tehdy shodné, když asociovaný homomorfismus φ zachovává velikost vektoru, tj.*

$$||\varphi(u)|| = ||u||.$$

Důkaz. $||\varphi(B - A)|| = ||f(B) - f(A)||$, $|f(A)f(B)| = |AB|$, $||B - A|| = ||u||$. □

Věta 25. *Afinní zobrazení f euklidovkého prostoru E do euklidovského prostoru E' je právě tehdy shodné, když asociovaný homomorfismus φ zachovává skalární součin vektorů, tj.*

$$\varphi(u) \cdot \varphi(v) = u \cdot v.$$

1.10.3 Myšlenka úplné klasifikace shodností roviny

Klasifikace shodností roviny je založena na zkoumání možných samodružných bodů a směrů zobrazení, které je dáno rovnicí (soustavou) (3). Myšlenka této klasifikace je ilustrována řešením následujícího příkladu.

PŘÍKLAD 1.12. *Zjistěte, zda existuje shodnost E_2, při které se bod $A = [10; 0]$ zobrazí na počátek $A' = [0; 0]$ a bod $B = [25; 20]$ na bod $B' = [0; 25]$. V kladném případě napište rovnice tohoto zobrazení a najděte jeho samodružné body.*

1.10.4 Klasifikace shodností roviny

Z podmínky (5) plyne, že afinní zobrazení určené rovnicemi

$$\begin{array}{rcrcrcr} x' & = & a_{11}x & + & a_{12}y & + & b_1 \\ y' & = & a_{21}x & + & a_{22}y & + & b_2, \end{array}$$

je shodností právě tehdy, když platí následující rovnosti:

$$\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{21}^2 = a_{12}^2 + a_{22}^2 &= 1 \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = a_{12}a_{11} + a_{22}a_{21} &= 0 \end{aligned}$$

Potom je zřejmé, že existuje úhel $\alpha \in \langle 0°; 360°)$ takový, že lze napsat

$$\begin{array}{rcl} a_{11} & = & \cos\alpha, \\ a_{21} & = & \sin\alpha, \\ a_{12}\cos\alpha + a_{22}\sin\alpha & = & 0, \\ a_{22} & = & \varepsilon\cos\alpha, \\ a_{12} & = & -\varepsilon\sin\alpha, \text{kde } \varepsilon = \pm 1. \end{array}$$

Hodnota ε určuje, zda se jedná o shodnost přímou ($\varepsilon = 1$) nebo nepřímou ($\varepsilon = -1$).

I. Přímé shodnosti

Každou přímou shodnost v rovině můžeme vyjádřit rovnicemi ve tvaru

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1' & = & x_1\cos\alpha & - & x_2\sin\alpha & + & b_1 \\ x_2' & = & x_1\sin\alpha & + & x_2\cos\alpha & + & b_2 \end{array}.$$

Samodružné body

Samodružné body přímé shodnosti jsou řešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x_1(1-\cos\alpha)+x_2\sin\alpha &= b_1 \\ -x_1\sin\alpha+x_2(1-\cos\alpha) &= b_2. \end{aligned} \tag{6}$$

Nejprve nás bude zajímat přímá shodnost v rovině, která má právě jeden samodružný bod. Soustava (6) má právě jedno řešení, pokud je regulární, tj. pokud pro její determinant platí

$$\begin{vmatrix} (1-\cos\alpha), & \sin\alpha \\ -\sin\alpha, & (1-\cos\alpha) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Po úpravě dostaneme

$$2(1-\cos\alpha)\neq 0,$$

což vede k podmínce

$$\cos\alpha \neq 1.$$

Tak dostáváme **OTOČENÍ (ROTACI)**. Stačí volit počátek soustavy souřadné v onom jediném samodružném bodě a dostaneme známé vyjádření rotace kolem počátku o úhel α:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1\cos\alpha - x_2\sin\alpha \\ x_2' &= x_1\sin\alpha + x_2\cos\alpha \end{aligned}$$

Samodružné směry

Směr je vyjádřen vektorem, např. $\vec{u}$. Má-li být tento směr samodružný, musí pro vektor $\vec{u}'$, který je obrazem vektoru $\vec{u}$, platit $\vec{u}' = \lambda\vec{u}$, kde $\lambda \in \mathbb{R}$. Samodružné směry (tj. vektory těchto směrů) přímé shodnosti jsou potom **netriviálním** řešením homogenní soustavy rovnic

$$\begin{aligned} u_1(\lambda-\cos\alpha)+u_2\sin\alpha &= 0 \\ -u_1\sin\alpha+u_2(\lambda-\cos\alpha) &= 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Homogenní soustava n lineárních rovnic o n neznámých má netriviální řešení právě tehdy, když je determinant soustavy roven nule. Soustavy (7) má tedy nekonečně mnoho řešení, jestliže platí rovnost

$$\begin{vmatrix} (\lambda-\cos\alpha), & \sin\alpha \\ -\sin\alpha, & (\lambda-\cos\alpha) \end{vmatrix} = 0. \tag{8}$$

Rovnici (8) říkáme **charakteristická rovnice** příslušného zobrazení, v tomto případě přímé shodnosti v rovině. Každý vektor $\vec{u}$, pro který platí $\vec{u}' = \varphi(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$, nazýváme **vlastním vektorem** homomorfismu φ, číslo λ, které je řešením charakteristické rovnice, pak nazýváme **vlastní číslo** homomorfismu φ, odpovídající vektoru $\vec{u}$. Místo vlastní vektor a vlastní číslo se také používají termíny **charakteristický vektor** a **charakteristické číslo**.

Úpravou (8) dostaneme rovnici

$$(\lambda-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha = 0,$$

která je splněna za předpokladu, že $\sin\alpha = 0$ a zároveň $\cos\alpha = \pm 1$. Pro $\cos\alpha = -1$ tak dostáváme **STŘEDOVOU SOUMĚRNOST** s analytickým vyjádřením

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_1 + b_1 \\ x_2' &= -x_2 + b_2. \end{aligned}$$

Za podmínky, že $\cos\alpha = 1$ dostaneme, pro $b_1 = b_2 = 0$, **IDENTITU**

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 \\ x_2' &= x_2 \end{aligned}$$

a pro $b_1 \neq 0 \vee b_2 \neq 0$ dostáváme **POSUNUTÍ**

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + b_1 \\ x_2' &= x_2 + b_2. \end{aligned}$$

II. Nepřímé shodnosti

Každou nepřímou shodnost v rovině můžeme vyjádřit rovnicemi ve tvaru

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1\cos\alpha + x_2\sin\alpha + b_1 \\ x_2' &= x_1\sin\alpha - x_2\cos\alpha + b_2. \end{aligned}$$

Samodružné směry

K vyšetření nepřímých shodností použijeme samodružné směry. Řešením charakteristické rovnice

$$\begin{vmatrix} (\lambda - \cos\alpha), & -\sin\alpha \\ -\sin\alpha, & (\lambda + \cos\alpha) \end{vmatrix} = 0, \tag{9}$$

dostaneme podmínku

$$\lambda = \pm 1,$$

která odpovídá tomu, že uvažované zobrazení má dva navzájem kolmé samodružné směry. Jeden, pro $\lambda = 1$, se zachovává, druhý, pro $\lambda = -1$, se mění v opačný. Volme soustavu souřadnou tak, aby osa x měla směr odpovídající $\lambda = 1$. Směr osy y pak zřejmě odpovídá $\lambda = -1$. Potom je nepřímá shodnost popsána rovnicemi

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + b_1 \\ x_2' &= -x_2 + b_2. \end{aligned}$$

Pokud je $b_1 = 0$, má uvažované zobrazení **přímku samodružných bodů** a jedná se tedy o **OSOVOU SOUMĚRNOST**

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 \\ x_2' &= -x_2 + b_2. \end{aligned}$$

Pokud je ale $b_1 \neq 0$, má pouze **samodružnou přímku** a jedná se o **POSUNUTÉ ZRCADLENÍ**.

1.10.5 Úlohy

45. Určete parametr s tak, aby existovala shodnost roviny zobrazující body $[0,0]$, $[3,4]$ po řadě na body $[5,0]$, $[9,s]$. Napište rovnice tohoto zobrazení a souřadnice obrazu bodu $[5,0]$. **[2]**

46. Určete $a,\ b,\ c$ tak, aby rovnice $x' = \dfrac{3}{4}x + by + 1, \quad y' = ax + cy - 1$ vyjadřovaly shodnost. **[3]**

47. Shodné zobrazení euklidovské roviny do euklidovského prostoru je dáno vzhledem ke kartézským soustavám souřadnic rovnicemi

a) $x' = x + \dfrac{1}{2}y + 1,\ y' = ax + \dfrac{1}{2}y - 1,\ z' = bx + cy + 3,$

b) $x' = x + by - 2,\ y' = \dfrac{1}{2}y + 1,\ z' = ax + cy - 3.$

Určete koeficienty a, b, c. **[3]**

48. Najděte souřadnice obrazu bodu $B = [1,2]$ v otočení v E_2 kolem středu $S = [3,-4]$ o úhel $\alpha = 420°$. Napište rovnice této shodnosti. **[1]**

49. Určete $p,\ q$ tak, aby existovala shodnost zobrazující body $[3,0],[1,2],[-1,-1]$ po řadě na body $[1,4],[p,2],[2,q]$. Najděte samodružné body a směry tohoto zobrazení. **[2]**

50. Napište rovnice středové souměrnosti v E_2 podle středu $S = [-4,5]$. **[1]**

51. Napište rovnice shodnosti roviny E_2, která vznikne složením tří osových souměrností s osami o rovnicích: $x = 0,\ y = 0,\ x - 2y = 0$. **[3]**

52. Rotace kolem bodu $S = [2;1]$ v E_2 zobrazuje bod $A = [1;1]$ na bod A'. Najděte souřadnice bodu A', jestliže pro úhel rotace α platí $\alpha = \frac{2}{3}\pi$. **[2]**

53. Najděte souřadnice středu a úhel rotace, která je dána rovnicemi: $x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 1,\ y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 2$. **[2]**

54. Najděte rovnice obrazu přímky p v rotaci v E_2 kolem středu $S = [-2;1]$ o úhel $\alpha = \frac{\pi}{6}$, jestliže $p : x - y + 1 = 0$. **[3]**