1.11 Shodná zobrazení v prostoru E_3

Věta 26. *Každé shodné zobrazení v prostoru* E_3 *lze složit z nejvýše čtyř rovinových souměrností.*

Některá shodná zobrazení v prostoru:

- Otočení kolem osy
- Posunutí
- Osová souměrnost
- Středová souměrnost
- Šroubový pohyb (torze)

1.11.1 Klasifikace shodností prostoru E_3

Ukáže se, že postup klasifikace lze značně zjednodušit. Zjistíme totiž, že při vhodné volbě umístění soustavy souřadnic můžeme využívat poznatky z klasifikace shodností v rovině.

Každé shodné zobrazení f v prostoru můžeme zapsat soustavou rovnic

$$\begin{array}{rcccccccc} f:\ x_1' & = & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & b_1 \\ x_2' & = & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & b_2 \\ x_3' & = & a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & + & b_3 \end{array}$$

kterou přepíšeme užitím matic do tvaru

$$f:\ \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

a stručně vyjádříme rovnicí

$$f:\ X' = A \cdot X + B. \tag{10}$$

Stejně jako v rovině i v prostoru platí, že (10) je shodností právě tehdy, když je

$$A^T \cdot A = E, \tag{11}$$

Charakteristická rovnice takovéhoto zobrazení, která se dá stručně zapsat jako

$$\det (A - \lambda E) = 0, \tag{12}$$

kde E je jednotková matice, je algebraickou rovnicí třetího stupně vzhledem k neznámé λ. To ale znamená, že má vždy alespoň jeden reálný kořen λ_0, tj. shodnost v E_3 má vždy alespoň jeden samodružný směr $\vec{u}$; $\vec{u}' = \lambda_0\vec{u}$. V případě shodností se zachovává velikost vektoru, tj. platí $||\vec{u}'|| = ||\lambda_0\vec{u}|| = ||\vec{u}||$. Potom je zřejmé, že hodnota λ_0 bude 1 nebo -1. Předpokládejme, že vektor $\vec{u}$ je jednotkový a volme soustavu souřadnou tak, aby měla osa z směr tohoto vektoru. Při takto zvolené soustavě souřadné se rovnice shodnosti zjednoduší na tvar

$$\begin{array}{rcccccccc} x_1' & = & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & & & + & b_1 \\ x_2' & = & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & & & + & b_2 \\ x_3' & = & & & & \pm & x_3 & + & b_3. \end{array}$$

Potom je požadavek, aby byla matice tohoto zobrazení

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ & & \pm 1 \end{bmatrix}$$

ortonormální, splněn právě tehdy, když je ortonormální matice

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

To je ale úloha, kterou jsme řešili při klasifikaci shodností v rovině a víme, že při vhodné volbě os x, y připadají v úvahu tyto možnosti, jak může uvedená matice typu $(2,2)$ vypadat:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}; \text{ pro } \sin\alpha \neq 0.$$

Ke každé z těchto matic existují dvě soustavy rovnic (protože uvažujeme $\pm z$). Posouzením množin samodružných bodů příslušných zobrazení a vhodnými volbami soustavy souřadné se dobereme k výsledné klasifikaci.

1. IDENTITA $(b_1 = b_2 = b_3 = 0)$ nebo POSUNUTÍ

$$\begin{array}{rcrcl} x_1' & = & x_1 & + & b_1 \\ x_2' & = & x_2 & + & b_2 \\ x_3' & = & x_3 & + & b_3. \end{array}$$

2. SOUMĚRNOST PODLE ROVINY $(b_1 = b_2 = 0)$ nebo
SOUMĚRNOST PODLE ROVINY složená s POSUNUTÍM podél této roviny

$$\begin{array}{rcrcl} x_1' & = & x_1 & + & b_1 \\ x_2' & = & x_2 & + & b_2 \\ x_3' & = & -x_3 & + & b_3. \end{array}$$

3. SOUMĚRNOST PODLE OSY rovnoběžné se z $(b_3 = 0)$ nebo
SOUMĚRNOST PODLE OSY rovnoběžné se z složená s POSUNUTÍM podél této osy

$$\begin{array}{rcrcl} x_1' & = & -x_1 & + & b_1 \\ x_2' & = & -x_2 & + & b_2 \\ x_3' & = & x_3 & + & b_3. \end{array}$$

4. STŘEDOVÁ SOUMĚRNOST

$$\begin{array}{rcrcl} x_1' & = & -x_1 & + & b_1 \\ x_2' & = & -x_2 & + & b_2 \\ x_3' & = & -x_3 & + & b_3. \end{array}$$

5. OTOČENÍ kolem osy rovnoběžné se z $(b_3 = 0)$ nebo
OTOČENÍ kolem osy rovnoběžné se z složené s POSUNUTÍM podél této osy

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1' & = & x_1 \cos\alpha & - & x_2 \sin\alpha & + & b_1 \\ x_2' & = & x_1 \sin\alpha & + & x_2 \cos\alpha & + & b_2 \\ x_3' & = & & & x_3 & + & b_3. \end{array}$$

6. OTOČENÍ kolem osy rovnoběžné se z složené se SOUMĚRNOSTÍ podle roviny kolmé k této ose

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1' & = & x_1 \cos\alpha & - & x_2 \sin\alpha & + & b_1 \\ x_2' & = & x_1 \sin\alpha & + & x_2 \cos\alpha & + & b_2 \\ x_3' & = & & & -x_3 & + & b_3. \end{array}$$

Poznámka. Každá přímá shodnost v prostoru se dá složit z otočení kolem přímky a posunutí podél této přímky. Potom můžeme říci, že každá dvě shodná tělesa v prostoru můžeme ztotožnit posunutím, otočením nebo šroubovým pohybem.

Poznámka. Nepřímá shodnost se dostane z přímé přidáním souměrnosti podle roviny.

1.11.2 Úlohy

55. Ověřte, že rovnicemi

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z + \frac{2}{3} \\ y' &= \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z - \frac{2}{3} \\ z' &= -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

je dáno shodné zobrazení E_3 na sebe, najděte jeho samodružné body a směry. **[3]**

56. Napište rovnice posunutí v E_3, v němž se bod $M = [-2, 3, 1]$ zobrazí na bod $M' = [5, 0, -4]$. Najděte souřadnice obrazu bodu $A = [1, 1, 1]$ v tomto posunutí. **[1]**

1.12 Shodná zobrazení v prostoru E_n

Věta 27. *Ke každé shodnosti f v E_n existuje k souměrností podle nadrovin tak, že f je jejich složením, $k < n + 2$.*