2 Podobná zobrazení

2.1 Stejnolehlost

PROBLÉM: Hledáme afinní zobrazení, které má všechny směry samodružné (tzv. homotetii).

DEFINICE 14. *Budiž dán bod S a reálné číslo κ ($\kappa \neq 0$).* **Stejnolehlost** $\mathrm{H}(S;\kappa)$ *se středem S a koeficientem κ je zobrazení, které každému bodu X roviny přiřadí bod X' tímto způsobem:*

1. Pro $X \equiv S$ je $X' \equiv X$,

2. Pro $X \not\equiv S$ je $|X'S| = |\kappa| \cdot |XS|$,
pro $\kappa > 0$ leží X' leží na polopřímce $\overrightarrow{SX}$ a
pro $\kappa < 0$ leží X' leží na polopřímce opačné k $\overrightarrow{SX}$.

PŘÍKLAD 2.1. *Napište rovnice stejnolehlosti afinní roviny $\mathbf{A}_2$, která zobrazuje bod $B = [2, 0, -1]$ na bod $C = [0, 1, 3]$ a má koeficient $\kappa = -2$. Najděte souřadnice jejího středu.*

Základní vlastnosti stejnolehlosti $H(S,\kappa)$**:**

1. Obrazem přímky je přímka s ní rovnoběžná.

2. Obrazem úsečky AB je úsečka $A'B'$; $|A'B'| = |\kappa| \cdot |AB|$.

3. Obrazem polopřímky je polopřímka s ní souhlasně ($\kappa > 0$) nebo nesouhlasně ($\kappa < 0$) rovnoběžná.

4. Obrazem úhlu $\angle AVB$ je úhel $\angle A'V'B'$; $|\angle A'V'B'| = |\angle AVB|$.

Věta 28. *Dělící poměr tří bodů na přímce se ve stejnolehlosti zachovává. Tedy $(A', B'; C') = (A, B; C)$ (tj. stejnolehlost je* **afinní***).*

Věta 29 (tzv. Mongeova věta o skládání stejnolehlostí). *Složením dvou stejnolehlostí $H_1(S_1, \kappa_1)$, $H_2(S_2, \kappa_2)$ vznikne*
1. identita, jestliže $S_1 = S_2$ a $\kappa_1\kappa_2 = 1$;
2. posunutí, jestliže $S_1 \neq S_2$ a $\kappa_1\kappa_2 = 1$;
3. stejnolehlost $H(S, \kappa)$ s koeficientem $\kappa = \kappa_1\kappa_2$, jestliže $\kappa_1\kappa_2 \neq 1$.

PŘÍKLAD 2.2. *Jsou dány dva různé body A, B a reálné číslo $\lambda \neq 0, 1$. Máme najít na přímce AB bod C tak, aby platilo $(ABC) = \lambda$.*

PŘÍKLAD 2.3. *V trojúhelníku ABC označme T těžiště, V průsečík výšek a S střed kružnice trojúhelníku opsané. Máme dokázat, že buď všechny tři body splynou v jediný, nebo jsou navzájem různé a leží na jedné přímce (Eulerova přímka) tak, že platí $(S, V; T) = -\frac{1}{2}$.*

PŘÍKLAD 2.4. (Kružnice devíti bodů, též Feuerbachova či Eulerova kružnice) *V trojúhelníku ABC označme V průsečík výšek, S střed kružnice opsané, C_1, A_1, B_1 středy stran AB, BC, CA. Nechť k_0 je kružnice procházející body A_1, B_1, C_1. Dokažte:*
1) Na kružnici k_0 leží též paty A_0, B_0, C_0 výšek v_a, v_b, v_c a středy úseček AV, BV, CV.
2) Střed kružnice k_0 je středem úsečky SV, pokud $S \not\equiv V$; pokud je $S \equiv V$ splyne střed k_0 s bodem S.
3) Poloměr kružnice k_0 je roven polovině poloměru kružnice trojúhelníku opsané.