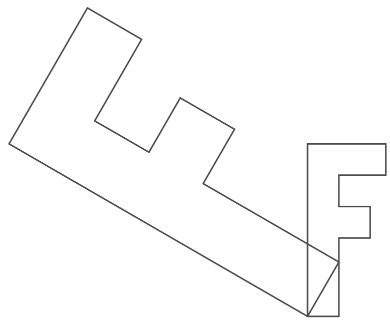
2.2 Podobné zobrazení

Úkol: Napište rovnice pro zobrazení v rovině, které každý útvar otočí kolem počátku o úhel α a dvakrát zvětší (viz Obr. 1).



Obrázek 3: Podobné zobrazení v rovině

DEFINICE 15. *Zobrazení f euklidovského prostoru E do euklidovského prostoru E' se nazývá* **podobné zobrazení**, *jestliže existuje kladné reálné číslo k tak, že pro každé dva body X, Y prostoru E platí:*

$$|f(X)f(Y)| = k|XY|.$$

Číslo k se nazývá koeficient podobného zobrazení f.

Poznámka. Podobnosti s koeficientem $k/neq1$ nazýváme **vlastní podobnosti**.

Věta 30. *Každé podobné zobrazení euklidovského prostoru E do eukl. pr. E' lze složit ze* **stejnolehlosti prostoru** *E a* **shodného zobrazení** *E* **do** *E'.*

Věta 31. *Každé podobné zobrazení je afinní.*

Věta 32 (O určenosti podobného zobrazení). *Nechť jsou $P_0, P_1, ..., P_n$ lineárně nezávislé body n-rozměrného euklidovského prostoru E_n a $P'_0, P'_1, ..., P'_n$ body euklidovského prostoru E'. Afinní zobrazení prostoru E_n do prostoru E', které zobrazuje bod P_i na bod P'_i pro $i = 0, 1, ..., n$ je právě tehdy podobné, existuje-li číslo $k > 0$ tak, že pro všechny dvojice $i, j = 0, 1, ..., n$ platí $|P'_iP'_j| = k|P_iP_j|$.*

PŘÍKLAD 2.5. *Zobrazení f euklidovské roviny do euklidovského trojrozměrného prostoru je vzhledem k zvoleným kartézským soustavám souřadnic dáno rovnicemi: $x' = 2x + ay - 1$, $y' = x + by + 2$, $z' = y + 1$. Určete koeficienty a, b tak, aby bylo zobrazení f podobné. Jaký je koeficient tohoto podobného zobrazení f?*

PŘÍKLAD 2.6. *V euklidovské rovině je dán čtverec $ABCD$ se středem S. Existuje právě jedno podobné zobrazení roviny čtverce do sebe, při kterém se body A, B, S zobrazí po řadě na body D, B, C. Rozložte toto podobné zobrazení na stejnolehlost a shodné zobrazení.*

PŘÍKLAD 2.7. *Ukažte, že každé dvě paraboly jsou podobné, tzn. že existuje podobné zobrazení roviny jedné paraboly na rovinu druhé paraboly, při kterém se jedna parabola zobrazí na druhou.*

Věta 33. *Každá* **vlastní podobnost** *má právě jeden samodružný bod.*

PŘÍKLAD 2.8. *Určete p, q, r tak, aby byla rovnicemi $x' = x - 2y + 2z + 4$, $y' = px + 2y + z - 2$, $z' = qx + ry + 2z - 2$ dána vzhledem ke kartézské soustavě souřadnic podobnost. Určete její samodružný bod a samodružné směry.*

Grupa podobností

Množina všech podobností euklidovského prostoru E_n spolu s operací skládání tvoří grupu - tzv. **grupu podobností prostoru** E_n.

2.2.1 Úlohy

1. Najděte všechny podobnosti euklidovské roviny, při kterých se bod $[1, 0]$ zobrazí na bod $[4, -2]$ a bod $[2, 3]$ na bod $[2, -8]$. **[2]**

2. Eulerovými body se nazývají středy úseček spojujících vrcholy trojúhelníku s průsečíkem jeho výšek.
Dokažte následující tvrzení:
Středy stran, paty výšek a Eulerovy body libovolného trojúhelníku leží na jedné kružnici. (*Tato kružnice se nazývá kružnice devíti bodů, Eulerova kružnice nebo Feuerbachova kružnice.*) **[3]**

3. Najděte podobnost euklidovské roviny, při které se zobrazí počátek na bod $[0, 2]$, bod $[1, 1]$ na počátek a bod $[2, 0]$ na bod $[2, p]$. Určete p a najděte samodružné body a směry nalezené podobnosti. **[2]**

4. Najděte rovnice podobnosti, při které je počátek samodružný a obrazem bodu $[5, -3]$ je bod $[1, 1]$. **[2]**

5. Určete všechny podobnosti, pro které jsou bod $[1, 1]$ a směr vektoru $(1, 1)$ samodružné. **[2]**

6. Napište rovnice všech podobností zobrazujících body $[1, 2]$ a $[0, 1]$ po řadě na body $[3, -1], [4, 2]$. Rozložte je na stejnolehlost a shodnost. **[2]**

7. V rovině je dán čtverec $ABCD$ se středem S. Určete obraz bodu C v podobnosti, která zobrazuje body A, B, S po řadě na body B, D, C. Určete samodružný bod této podobnosti. **[2]**

8. Sestrojte alespoň jeden trojúhelník ABC, pro který platí $|AB| : |AC| = 3 : 5$, $\alpha = 60°$, $\rho = 1,8cm$(poloměr kružnice vepsané). **[2]**

9. Sestrojte kosodélník $ABCD$, je-li dáno $|\angle DAB| = \alpha$, $|\angle ABD| = \varepsilon$, $|AC| = e$. **[2]**

10. Je dána kružnice k a bod A, který je bodem vnější oblasti kružnice k. Sestrojte všechny sečny kružnice k, které procházejí bodem A a pro jejichž průsečíky X, Y s kružnicí platí $|AX| = 2|AY|$. **[2]**

11. Je dána kružnice $k(S; 4cm)$, její tečna t a bod $M \in k$ tak, že $|Mt| = 2cm$. Sestrojte úsečku XY procházející bodem M tak, aby $X \in k, Y \in t$ a $|MX| : |MY| = 3 : 2$. **[1]**

12. Jsou dány dvě různoběžky a, b a kružnice k tak, že $P \in a \cap b$ je bodem vnitřní oblasti kružnice k. Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají přímek a, b i kružnice k. **[2]**

13. Dokažte následující věty (za důkaz každé věty **[4]** body):

Věta 34 (Menelaova věta). *Je dán trojúhelník ABC a přímka p, která neprochází žádným z bodů A, B, C, ale protíná přímky AB, BC, CA v bodech C', A', B'. Potom platí:*

$$(ABC') \cdot (BCA') \cdot (CAB') = 1.$$

Naopak, platí-li uvedený vztah, body A', B', C' leží na přímce.

Věta 35 (Pappova věta). *Nechť jsou A', B', C', D' rovnoběžné nebo středové průměty čtyř navzájem různých bodů A, B, C, D přímky p na přímku p'; $p' \neq p$. Potom:*

$$(A'B'C'D') = (ABCD)$$

Věta 36 (Cevova věta). *Nechť je dán trojúhelník ABC a bod M, který neleží na žádné z přímek AB, BC, CA. Průsečíky přímek AM, BM, CM s přímkami BC, CA, AB (různé od bodů A, B, C) označme postupně A', B', C'. Potom platí:*

$$(ABC') \cdot (BCA') \cdot (CAB') = -1.$$

Naopak, platí-li uvedený vztah, jsou přímky AA', BB', CC' buď navzájem rovnoběžné nebo se protínají v jediném bodě.

2.3 Podobnosti euklidovské roviny

Víme, že každé podobné zobrazení euklidovské roviny do sebe lze složit ze **stejnolehlosti** a **shodnosti**.

1. Stejnolehlost H volíme se středem v počátku soustavy souřadnic a s koeficientem $k > 0$:

$$H : X \mapsto \overline{X}; \quad \begin{aligned} \overline{x} &= kx \\ \overline{y} &= ky. \end{aligned}$$

2. Shodnost S je buď přímá nebo nepřímá:

$$S : \overline{X} \mapsto X'; \quad \begin{aligned} x' &= \overline{x}\cos\alpha \mp \overline{y}\sin\alpha + p \\ y' &= \overline{x}\sin\alpha \pm \overline{y}\cos\alpha + q. \end{aligned}$$

Výsledkem složení $S \circ H$ je potom přímá nebo nepřímá podobnost.

Přímá podobnost	**Nepřímá podobnost:**
$\begin{aligned} x' &= kx\cos\alpha - ky\sin\alpha + p \\ y' &= kx\sin\alpha + ky\cos\alpha + q. \end{aligned}$	$\begin{aligned} x' &= kx\cos\alpha + ky\sin\alpha + p \\ y' &= kx\sin\alpha - ky\cos\alpha + q. \end{aligned}$
$\begin{aligned} x' &= ax - by + p \\ y' &= bx + ay + q. \end{aligned}$	$\begin{aligned} x' &= ax + by + p \\ y' &= bx - ay + q. \end{aligned}$
$A^T \cdot A = (a^2 + b^2) \cdot I; \qquad k = \sqrt{a^2 + b^2}$	

Věta 37. *Každá vlastní podobnost euklidovské roviny je buď* **stejnolehlost**, *nebo* **stejnolehlost složená s otočením kolem středu stejnolehlosti**, *nebo* **stejnolehlost složená s osovou souměrností**, *jejíž osa prochází středem stejnolehlosti.*