1 Shodná zobrazení

1.1 Osová souměrnost

1. Napište rovnice souměrnosti podle přímky $o : 2x - 3y + 1 = 0$. [**1**]

2. Napište rovnice osové souměrnosti, zobrazující počátek na bod $[1, 5]$. [**1**]

3. Je dána přímka p a dvě kružnice k_1, k_2 oddělené přímkou p. Sestrojte rovnostranný trojúhelník tak, aby na každé z kružnic k_1, k_2 byl jeden vrchol a jedna z výšek ležela na přímce p. [**1**]

4. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dán obvod $o = 12cm$ a úhly $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$. [**2**]

5. Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC (AB je základna). Dokažte, že součet vzdáleností každého bodu X základny od přímek AC a BC je konstantní. [**1**]

6. Jsou dány dvě různoběžky p, q a bod A mimo ně. Najděte body $B \in p$, $C \in q$ tak, aby obvod trojúhelníku ABC byl minimální. [**2**]

7. Jsou dány tři různé přímky p_1, p_2, p_3, procházející bodem S; na přímce p_1 je dán bod $A \neq S$. Sestrojte trojúhelník ABC, jehož osy vnitřních úhlů leží v přímkách p_1, p_2, p_3. [**2**]

8. Jsou dány tři přímky o_1, o_2, o_3 procházející bodem O. Na o_1 dán bod A_1. Sestrojte $\triangle ABC$ tak, aby o_1, o_2, o_3 byly osami jeho stran a bod A_1 středem strany BC. [**2**]

9. Jsou dány body X, Y a přímka p, která je odděluje. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC, jehož hlavním vrcholem je bod C, osou souměrnosti přímka p a jehož ramena mají danou velikost a. Přímka AC nechť prochází bodem X a přímka BC bodem Y. [**1**]

10. Je dána přímka p a body A, B, ležící ve stejné polorovině s hraniční přímkou p. Sestrojte bod $X \in p$ tak, aby $|\angle AXp| = 2|\angle BXp|$. [**3**]

11. Jsou dány body A, B, C a přímka p kolmá k přímce AB tak, že prochází bodem C a body A, B leží v téže polorovině určené přímkou p. Sestrojte na přímce p takový bod X, aby z něho byla vidět úsečka AB pod stejným úhlem jako úsečka BC. [**3**]

12. Obrazy středu S kružnice opsané trojúhelníku ABC v osových souměrnostech podle přímek BC, AC, AB jsou vrcholy trojúhelníku $A_1B_1C_1$. Dokažte, že je tento trojúhelník shodný s trojúhelníkem ABC. [**2**]

13. Sestrojte konvexní čtyřúhelník $ABCD$ se stranami dané velikosti, je-li $\mapsto AC$ osou vnitřního úhlu při vrcholu A. [**2**]

14. Sestrojte čtverec $ABCD$, je-li dáno $a + e = 10cm$. [**1**]

15. Sestrojte obdélník $ABCD$, je-li dáno $e = 7cm$, $a - b = 1cm$. [**2**]

16. Sestrojte lichoběžník $ABCD$ ($AB \| CD$), je-li dáno $b = 3cm$, $c = 2.5cm$, $d = 2.6cm$, $\alpha - \beta = 20°$. [**2**]

17. Mascheroniova konstrukce. Je dána kružnice $k(S; r)$; dále je dána dvěma body A, B (body neleží na kružnici) její sečna p, která neprochází středem S. Sestrojte průsečíky přímky p s kružnicí k, aniž přitom použijete pravítka. [**3**]

18. Dokažte, že body souměrně sdružené s průsečíkem výšek podle stran trojúhelníka, leží na kružnici trojúhelníku opsané. [**3**]

1.2 Otočení

19. Jsou dány dvě shodné úsečky AB, CD. Určete otočeení, které zobrazí A na C a B na D. [**2**]

20. Je dána kružnice $k(S;r)$ a bod $P \neq S$. Bodem P veďte přímku, na které kružnice vytíná úsečku dané velikosti d. [**1**]

21. Při odvalování kružnice po přímce se body soustavy spojené s kružnicí pohybují po trajektoriích, kterým se říká **cykloidy**. Rozlišujeme tři typy cykloid, v závislosti na tom, zda bod leží vně, na nebo uvnitř kružnice. Zobrazte tyto křivky pomocí programu Maple. [**3**]

22. Jsou dány různé rovnoběžné přímky a, b, c a bod A, který leží na přímce a. Sestrojte všechny rovnostranné trojúhelníky ABC, jejichž vrcholy B, C leží po řadě na přímkách b, c. [**1**]

23. Jsou dány dvě rovnoběžné přímky a, b a mimo ně bod C. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC tak, aby jeho vrcholy A, B ležely po řadě na přímkách a, b. [**1**]

24. Je dána kružnice $k(S; 3cm)$ a bod A ($|SA| = 1.5cm$). Sestrojte všechny tětivy XY kružnice k o délce $5.5cm$, které procházejí bodem A. [**2**]

25. Je dána kružnice $k(S;r)$, bod B a úsečka délky d ($d < 2r$). Sestrojte tětivu XY kružnice k délky d tak, aby byla vidět z bodu B pod úhlem $60°$. [**2**]

26. Jsou dány kružnice k, přímka p a bod A ležící vně k. Sestrojte rovnostranný trojúhelník s vrcholem v bodě A tak, aby zbývající vrcholy ležely na k a na p. [**1**]

1.3 Středová souměrnost

27. Je dána kružnice $k(O;r)$ a přímka p, která má od středu O vzdálenost $v > 0$; dále je dán bod S, který leží uvnitř poloroviny pO. Sestrojte úsečku se středem S, která má krajní body K, P po řadě na kružnici k a na přímce p. [**1**]

28. Je dána kružnice $k(S,r)$. Bodem P, který leží vně kružnice k, veďte přímku p, která protíná kružnici v bodech A, B tak, že A je středem úsečky BP. [**2**]

29. Vepište danému rovnoběžníku $ABCD$ čtverec $XYUV$ tak, aby na každé straně rovnoběžníku ležel jeden vrchol čtverce. [**1**]

30. Je dán úhel AVB a bod S jeho vnitřku. Sestrojte na rameni VA bod X a na rameni VB bod Y tak, aby bod S byl středem úsečky XY. [**1**]

31. Je dán úhel AVB a bod S jeho vnitřku. Sestrojte na rameni VA bod X a na rameni VB bod Y tak, aby XYS byl rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník s přeponou XY. [**1**]

32. Je dána úsečka AA_1 ($|AA_1| = 5cm$). Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, pro které je AA_1 těžnicí t_a a pro které platí: $c = 4cm, b = 7cm$. [**2**]

33. Je dána úsečka AA_1 ($|AA_1| = 5cm$). Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, pro které je AA_1 těžnicí t_a a pro které platí: $\gamma = 45°, \beta = 60°$. [**1**]

34. Jsou dány dvě kružnice k_1, k_2, které se protínají ve dvou bodech Q a R. Bodem Q veďte přímku, která vytíná na obou kružnicích tětivy stejné délky. [**1**]

35. Je dán trojúhelník ABC a jeho vnitřní bod M. Sestrojte všechny úsečky XY se středem M a s krajními body X, Y na hranici trojúhelníku. [**1**]

36. Je dána úsečka AA_1; $|AA_1| = 4.5cm$. Sestrojte všechny pravoúhlé trojúhelníky ABC s pravým úhlem při vrcholu C, v nichž AA_1 je těžnicí t_a a $t_b = 6cm$. [**1**]

1.4 Posunutí

37. Jsou dány přímka p a dvě nesoustředné kružnice $k_1(S_1, r_1)$, $k_2(S_2, r_2)$. Veďte přímku rovnoběžnou s přímkou p tak, aby na ní kružnice k_1, k_2 vytínaly shodné tětivy. **[1]**

38. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, jehož úhlopříčky svírají pravý úhel, jsou-li dány velikosti úhlopříček $|AC| = e$, $|BD| = f$ a velikosti úhlů $|\angle ABC| = 90°$, $|\angle ADC| = \delta$. **[2]**

39. Sestrojte lichoběžník, jsou-li dány velikosti jeho stran a, b, c, d. **[1]**

40. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, jsou-li dány velikosti jeho stran $|AB| = a, |BC| = b, |CD| = c, |DA| = d$ a odchylka ω přímek AD, BC. **[2]**

41. Sestrojte rovnoběžník, jsou-li dány délky jeho stran a velikost úhlu jeho úhlopříček. **[1]**

42. Sestrojte lichoběžník $ABCD$, jsou-li dány délky obou jeho základen a, c a obou jeho úhlopříček e, f. **[1]**

43. Jsou dány dvě různoběžky a, b a úsečka délky r. Sestrojte všechny kružnice k se středem na přímce a, poloměrem r, které na přímce b vytínají tětivu délky r. **[1]**

1.5 Posunuté zrcadlení

44. Jsou dány dvě různoběžky a, b a na nich dva body $A \neq B$ (A na a, B na b). Určete bod X na a a bod Y na b tak, aby platilo $|AX| = |BY|$ a dále aby:
- a) $XY \| p$, kde p je daná přímka; **[1]**
- b) $XY = d$, kde d je předem daná úsečka; **[1]**
- c) střed úsečky XY ležel na dané přímce q. **[1]**

1.6 Klasifikace shodností

45. Určete parametr s tak, aby existovala shodnost roviny zobrazující body $[0, 0]$, $[3, 4]$ po řadě na body $[5, 0]$, $[9, s]$. Napište rovnice tohoto zobrazení a souřadnice obrazu bodu $[5, 0]$. **[2]**

46. Určete $a,\ b,\ c$ tak, aby rovnice $x' = \frac{3}{4}x + by + 1, \quad y' = ax + cy - 1$ vyjadřovaly shodnost. **[3]**

47. Shodné zobrazení euklidovské roviny do euklidovského prostoru je dáno vzhledem ke kartézským soustavám souřadnic rovnicemi

a) $x' = x + \frac{1}{2}y + 1,\ y' = ax + \frac{1}{2}y - 1,\ z' = bx + cy + 3,$

b) $x' = x + by - 2,\ y' = \frac{1}{2}y + 1,\ z' = ax + cy - 3.$

Určete koeficienty a, b, c. **[3]**

48. Najděte souřadnice obrazu bodu $B = [1, 2]$ v otočení v E_2 kolem středu $S = [3, -4]$ o úhel $\alpha = 420°$. Napište rovnice této shodnosti. **[1]**

49. Určete $p,\ q$ tak, aby existovala shodnost zobrazující body $[3, 0], [1, 2], [-1, -1]$ po řadě na body $[1, 4], [p, 2], [2, q]$. Najděte samodružné body a směry tohoto zobrazení. **[2]**

50. Napište rovnice středové souměrnosti v E_2 podle středu $S = [-4, 5]$. **[1]**

51. Napište rovnice shodnosti roviny E_2, která vznikne složením tří osových souměrností s osami o rovnicích: $x = 0,\ y = 0,\ x - 2y = 0$. **[3]**

52. Rotace kolem bodu $S = [2; 1]$ v E_2 zobrazuje bod $A = [1; 1]$ na bod A'. Najděte souřadnice bodu A', jestliže pro úhel rotace α platí $\alpha = \frac{2}{3}\pi$. **[2]**

53. Najděte souřadnice středu a úhel rotace, která je dána rovnicemi: $x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 1$, $y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 2$. **[2]**

54. Najděte rovnice obrazu přímky p v rotaci v E_2 kolem středu $S = [-2; 1]$ o úhel $\alpha = \frac{\pi}{6}$, jestliže $p : x - y + 1 = 0$. **[3]**

55. Ověřte, že rovnicemi

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z + \frac{2}{3} \\ y' &= \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z - \frac{2}{3} \\ z' &= -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

je dáno shodné zobrazení E_3 na sebe, najděte jeho samodružné body a směry. **[3]**

56. Napište rovnice posunutí v E_3, v němž se bod $M = [-2, 3, 1]$ zobrazí na bod $M' = [5, 0, -4]$. Najděte souřadnice obrazu bodu $A = [1, 1, 1]$ v tomto posunutí. **[1]**