2 Afinní zobrazení

Afinní zobrazení v rovině je příkladem transformace roviny na sebe. Každému bodu X roviny E_2 přiřadí bod $X' = f(X)$ téže roviny při zachování určitých vlastností. Důležitým pojmem při zavedení afinního zobrazení je dělicí poměr. Jedná se o tzv. *invariant* afinního zobrazení.

2.1 Dělicí poměr

Dělicím poměrem zde rozumíme číslo, které jednoznačně udává polohu bodu na přímce vzhledem ke dvěma pevně daným bodům této přímky.

Obrázek 9: Tři kolineární body

Definice 9 (Dělicí poměr). *Nechť A, B, C; $A \neq B$, $C \neq B$, jsou tři body ležící na přímce (tj. tři kolineární body). Dělicím poměrem bodu C vzhledem k bodům A, B rozumíme reálné číslo λ, které zapisujeme (ABC), a pro jehož absolutní hodnotu platí*

$$|(ABC)| = \frac{|AC|}{|BC|}, \tag{1}$$

přitom pro bod C ležící vně úsečky AB je $(ABC) > 0$ a pro bod C ležící uvnitř AB je $(ABC) < 0$. Pro $C = A$ je zřejmě $(ABC) = 0$.

Poznámka. Uvedená definice zavádí dělicí poměr pomocí podílu vzdáleností bodu C od daných bodů A, B. Protože vzdálenosti jsou kladné, nepřináší jejich podíl žádnou informaci o znaménku dělicího poměru, kterému pak musí být věnována zvláštní část definice. Tomu se vyhneme, pokud použijeme k zavedení pojmu dělicí poměr odpovídající vektory definované příslušnou trojicí bodů, viz Obr.10.

Obrázek 10: Dělicí poměr bodu C vzhledem k bodům A, B

Definice 10 (Dělicí poměr 2). *Nechť A, B, C; $A \neq B$, $C \neq B$, jsou tři body ležící na přímce (tj. tři kolineární body). Potom číslo λ definované rovnicí*

$$C - A = \lambda(C - B) \tag{2}$$

značíme (ABC) a nazýváme dělicím poměrem bodu C vzhledem k bodům A, B.

Poznámka. Ve vztahu (2) je obsažena kompletní informace o čísle λ, tj. o jeho absolutní hodnotě i o znaménku. Pro snazší zapamatování si můžeme (2) přepsat do tvaru

$$\lambda = \frac{C - A}{C - B},$$

který sice není formálně správně, ale jasně koresponduje se vztahem (1). Smysl získá až dosazením souřadnic bodů $A = [a_1; a_2]$, $B = [b_1; b_2]$, $C = [c_1; c_2]$:

$$\lambda = \frac{c_1 - a_1}{c_1 - b_1} = \frac{c_2 - a_2}{c_2 - b_2}.$$

PŘÍKLAD 2.1. *Určete dělicí poměr (ABS) středu S úsečky AB vzhledem k jejím krajním bodům A, B.*

PŘÍKLAD 2.2. *Pro body A, B, C platí $(ABC) = \lambda$. Zapište pomocí λ dělicí poměry $(BAC), (CBA), (ACB), (CAB)$ a (BCA).*

Řešení: Vztah (2) pro $(ABC) = \lambda$ přepíšeme do tvaru $A = \lambda B + (1 - \lambda)C$. Odtud po vydělení λ dostaneme $B = \frac{1}{\lambda}A + (1 - \frac{1}{\lambda})C$. Odtud je zřejmé, že $(BAC) = \frac{1}{\lambda}$. Poznamenejme ještě, že ke stejnému výsledku vede také toto odvození: $(BAC) = \frac{C - B}{C - A} = \frac{1}{\frac{C-A}{C-B}} = \frac{1}{\lambda}$.

Analogicky odvodíme vyjádření dalších dělicích poměrů v rámci dané trojice bodů: $(CBA) = \frac{\lambda}{\lambda - 1}, (ACB) = 1 - \lambda, (CAB) = \frac{1}{1 - \lambda}$ a $(BCA) = 1 - \frac{1}{\lambda}$.

PŘÍKLAD 2.3. *V rovině jsou dány dva pevné body A, B. Určete množinu všech bodů X této roviny, pro které platí*

$$\frac{|AX|}{|BX|} = k,$$

kde k je reálná konstanta.

Řešení: Hledanou množinou je kružnice, které je známá jako „Apolloniova kružnice“. Nalezení její rovnice si usnadníme vhodným umístěním bodů A, B vzhledem k souřadnicovým osám. Konkrétně je umístíme na osu x tak, že $A = [-a, 0]$ a $B = [a, 0]$, kde $a \in R$. Vztah $\frac{|AX|}{|BX|} = k$ přepíšeme do tvaru

$$|AX| = k|BX|$$

a dosadíme uvedené souřadnice bodů A, B, X. Dostaneme

$$\sqrt{(x + a)^2 + y^2} = k\sqrt{(x - a)^2 + y^2}.$$

Po umocnění obou stran rovnosti na druhou a po několika úpravách, mimo jiné také použijeme doplnění na čtverec, dostáváme rovnici vyšetřované množiny bodů $X = [x, y]$ ve tvaru

$$\left(x - \frac{a(k^2+1)}{k^2-1}\right)^2 + y^2 = \frac{4a^2k^2}{(k^2-1)^2},$$

který odpovídá rovnici $(x - s_1)^2 + (y - s_2)^2 = r^2$ kružnice se středem $S = [s_1, s_2]$ a poloměrem r.

2.2 Afinní zobrazení

Definice 11 (Afinní zobrazení)**.** *Zobrazení f afinního prostoru A do afinního prostoru A' se nazývá afinní, jestliže má tuto vlastnost: Leží-li navzájem různé body B, C, D z prostoru A na přímce, pak jejich obrazy $f(B), f(C), f(D)$ buď splývají, nebo jsou navzájem různé, leží na jedné přímce a jejich dělící poměr se rovná dělícímu poměru jejich vzorů, tj.:*

$$(f(B), f(C); f(D)) = (B, C; D).$$