4 Afinní transformace roviny (Afinita)

Budeme uvažovat speciální případ afinního zobrazení, kdy prostory A a A' splynou. Půjde nám tak o vzájemně jednoznačné zobrazení prostoru A (v našem případě E_2) na sebe.

Definice 14. *Vzájemně jednoznačné afinní zobrazení afinního prostoru E_2 na sebe nazýváme* **afinitou** *prostoru E_2 nebo* **afinní transformací prostoru** E_2.

Poznámka. *Vzájemně jednoznačným zobrazením* rozumíme zobrazení, které je zároveň *prosté* a *na množinu.*

Věta 1. *Všechny afinity prostoru E_2 tvoří při obvyklém skládání grupu, tzv.* **afinní grupu prostoru** E_2.

Důkaz. Složením dvou afinit prostoru E_2 vznikne opět afinita prostoru E_2. K afinitě f existuje inverzní afinita f^{-1} (afinita je vzájemně jednoznačné zobrazení). Neutrálním prvkem je zřejmě identita. $\square$

4.1 Analytické vyjádření afinity v rovině

Každé afinní zobrazení f v rovině E_2, které bodu $X = [x, y]$ přiřazuje obraz $X' = [x', y']$, je možné zapsat rovnicemi

$$\begin{array}{rcl} f: x' &=& a_{11}x + a_{12}y + b_1 \\ y' &=& a_{21}x + a_{22}y + b_2 \end{array} \tag{3}$$

a naopak, každé zobrazení v rovině, které je dáno soustavou rovnic (3), je afinitou v rovině. Soustavu (3) můžeme zapsat také pomocí matic

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Potom řekneme, že afinitou je každé zobrazení, které lze zapsat maticovou rovnicí

$$\mathbf{X}' = A \cdot \mathbf{X} + B,$$

kde $X' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ a $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$.

PŘÍKLAD 4.1. *Maticovou rovnicí ve tvaru (4) zapište tyto afinity: (i) osová souměrnost podle osy y, (ii) středová souměrnost podle počátku, (iii) Středová souměrnost se středem v bodě $[0, 5]$. Využijte: tube.geogebra.org/student/mUcqvE9uT*

Věta 2 (O určenosti afinity v rovině)**.** *Nechť K, L, M a K', L', M' jsou dvě skupiny nekolineárních bodů v rovině. Pak existuje jediná afinita f této roviny, která body K, L, M zobrazuje v daném pořadí na body K', L', M'.*

Důkaz. Využijeme (3). Afinita f musí být dána takovýmito rovnicemi. Ukážeme, že za podmínek uvedených ve větě je tato afinita určena jednoznačně, tj. existuje jediná šestice $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$, která tuto afinitu specifikuje.

Pro jednotlivé dvojice bodů „vzor $\to$ obraz“ dostaneme následující rovnice:

$K[k_1, k_2] \to K'[k_1', k_2']$:

$$a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + b_1 = k_1', \tag{5}$$
$$a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + b_2 = k_2'. \tag{6}$$

$L[l_1, l_2] \to L'[l_1', l_2']$:

$$a_{11}l_1 + a_{12}l_2 + b_1 = l_1', \tag{7}$$
$$a_{21}l_1 + a_{22}l_2 + b_2 = l_2'. \tag{8}$$

$M[m_1, m_2] \to M'[m_1', m_2']$:

$$a_{11}m_1 + a_{12}m_2 + b_1 = m_1', \tag{9}$$
$$a_{21}m_1 + a_{22}m_2 + b_2 = m_2'. \tag{10}$$

Pro známé souřadnice bodů K, L, M, K', L', M' tak máme soustavu 6 rovnic o 6 neznámých $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$. Zajímá nás, za jakých podmínek má jediné řešení. Tyto podmínky by se měly shodovat s obsahem věty 2. Po detailním prozkoumání rovnic (5)–(10) je patrné, že jejich soustava se dá rozdělit na dvě vzájemně nezávislé soustavy 3 rovnic o 3 neznámých: soustavu rovnic (5), (7) a (9) o neznámých a_{11}, a_{12}, b_1 a soustavu rovnic (6), (8) a (10) o neznámých a_{21}, a_{22}, b_2. Přitom první z těchto soustav má rozšířenou matici

$$\left[\begin{array}{ccc|c} k_1 & k_2 & 1 & k_1' \\ l_1 & l_2 & 1 & l_1' \\ m_1 & m_2 & 1 & m_1' \end{array}\right], \tag{11}$$

druhá má potom rozšířenou matici

$$\left[\begin{array}{ccc|c} k_1 & k_2 & 1 & k_2' \\ l_1 & l_2 & 1 & l_2' \\ m_1 & m_2 & 1 & m_2' \end{array}\right]. \tag{12}$$

Soustavy se tedy shodují v matici soustavy (liší se pouze vektory pravých stran). Aby měly obě soustavy jediné řešení, musí být determinant této matice různý od nuly, tj.

$$\begin{vmatrix} k_1 & k_2 & 1 \\ l_1 & l_2 & 1 \\ m_1 & m_2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{13}$$

Determinant v (13) snadno spočítáme eliminací jedniček na pozicích $(2, 3)$ a $(3, 3)$ postupným odečtením prvního řádku od druhého a třetího řádku a následným rozvojem takto upraveného determinantu podle třetího sloupce. Dostaneme tak podmínku

$$\begin{vmatrix} l_1 - k_1 & l_2 - k_2 \\ m_1 - k_1 & m_2 - k_2 \end{vmatrix} \neq 0, \tag{14}$$

která je splněna právě tehdy, když jsou vektory $L - K$ a $M - K$ nezávislé, tj. body K, L, M neleží v přímce.

Teď zbývá dokázat, že když body K, L, M neleží v přímce, ani body K', L', M' nemohou ležet v přímce. Tentokrát využijeme maticovou rovnici afinity $X' = A \cdot X + B$. Pro uvedené dvojice bodů platí:

$$K' = A \cdot K + B, \tag{15}$$
$$L' = A \cdot L + B, \tag{16}$$
$$M' = A \cdot M + B. \tag{17}$$

Důkaz provedeme sporem. Předpokládáme, že K, L, M neleží v přímce a zároveň body K', L', M' leží v přímce. Potom existuje $j \in R$ takové, že $L' - K' = j(M' - K')$. Po dosazení z (15)–(17) a vynásobení obou stran rovnice zleva maticí inverzní k A dostaneme $L - K = j(M - K)$, což je spor s předpokladem nekolineárnosti bodů K, L, M. Body K', L', M' tedy také nemohou ležet v přímce.

□

4.2 Souvislost mezi skládáním afinních zobrazení a násobením matic

Pro zjednodušení budme uvažovat pouze *lineární zobrazení*. To jsou afinní transformace s nulovým vektorem posunutí, tj. v rovnicích (4) mají $b_1 = b_2 = 0$.

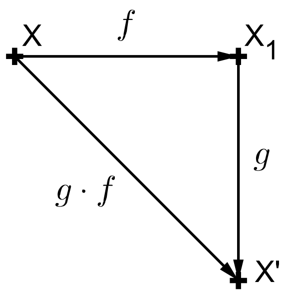
PŘÍKLAD 4.2. *Jsou dána lineární zobrazení f, g :*

$$f : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad g : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Určete matici M složeného zobrazení

$$g \cdot f : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = M \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Řešení: Uvažujme situaci znázorněnou na Obr. 18. Bod $X[x, y]$ je afinitou f zobrazen



Obrázek 18: Skládání afinit f a g v rovině

na bod $X_1[x_1, y_1]$, ten je pak afinitou g zobrazen na bod $X'[x', y']$. Tuto skutečnost můžeme zapsat rovnicemi

$$X \xrightarrow{f} X_1 : \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}; \quad X_1 \xrightarrow{g} X' : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix},$$

odkud po dosazení za $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ z první rovnice do druhé dostáváme

$$X \xrightarrow{g \cdot f} X' : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \tag{18}$$

Skládání afinit znázorněné Obr. 18 ale můžeme zapsat i pomocí rovnic. Platí

$$X \xrightarrow{f} X_1 : \begin{array}{rcrcr} x_1 & = & ax & + & by \\ y_1 & = & cx & + & dy \end{array}; \qquad X_1 \xrightarrow{g} X' : \begin{array}{rcrcr} x' & = & Ax_1 & + & By_1 \\ y' & = & Cx_1 & + & Dy_1 \end{array}.$$

Potom po dosazení za x_1 a y_1 z první soustavy rovnic do druhé dostaneme

$$X \xrightarrow{g \cdot f} X' : \begin{array}{rcrcrcrcr} x' & = & A(ax+by) & + & B(cx+dy) & = & (Aa+Bc)x & + & (Ab+Bd)y \\ y' & = & C(ax+by) & + & D(cx+dy) & = & (Ca+Dc)x & + & (Cb+Dd)y \end{array},$$

po přepsání do maticového tvaru

$$X \xrightarrow{g\cdot f} X' : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Aa + Bc & Ab + Bd \\ Ca + Dc & Cb + Dd \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Z porovnání (18) a (19) je zřejmé, že pro matici M složené afinity $g \cdot f$ platí:

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Aa + Bc & Ab + Bd \\ Ca + Dc & Cb + Dd \end{bmatrix}. \tag{20}$$

Rovnost (20) tak přináší známý algoritmus pro násobení dvou matic.