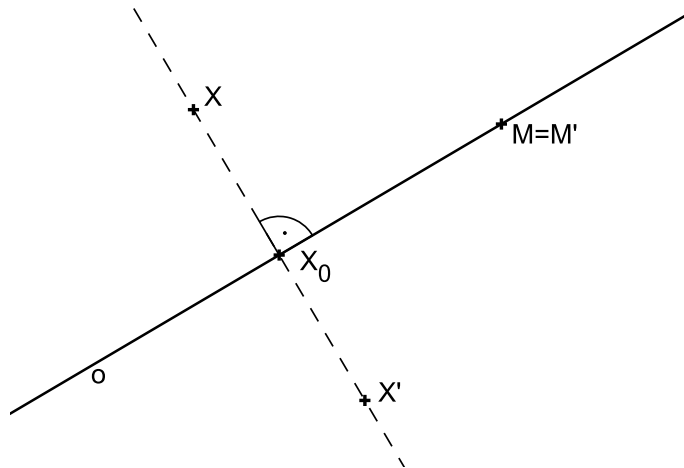


4.2 Osová souměrnost

Definice 16. *Nechť je dána přímka o , kterou nazýváme **osa souměrnosti**. Potom pro obraz M' libovolného bodu M této přímky o platí $M' \equiv M$. Ke každému bodu X , který neleží na přímce o , sestrojíme obraz X' následujícím způsobem: Bodem X vedeme kolmici k na přímku o a její patu označíme X_0 . Na polopřímce opačné k polopřímce X_0X sestrojíme bod X' tak, že $|X'X_0| = |XX_0|$. Takto definované zobrazení nazýváme **osová souměrnost s osou o** a značíme ho $\mathcal{O}(o)$.*

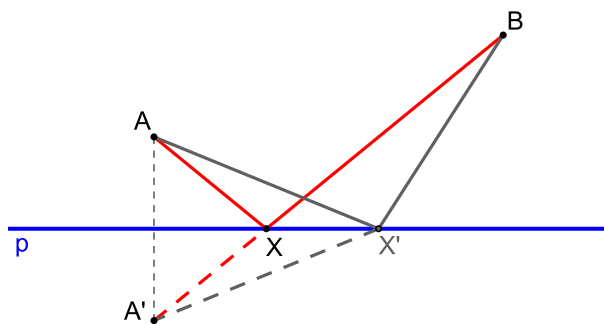


Obrázek 11: Definice osové souměrnosti

Poznámky:

1. O bodech X, X' říkáme, že je to dvojice bodů souměrně sdružených podle osy o .
2. Osová souměrnost je příkladem involutorního zobrazení (involuce).

PŘÍKLAD 4.3. *Je dána přímka p a body A, B v téže polorovině s hraniční přímkou p . Najděte všechny body $X \in p$ takové, že součet vzdáleností $|AX| + |BX|$ je minimální.*



Obrázek 12: Využití osové souměrnosti ke geometrickému řešení příkladu 12

Věta 5. *Osová souměrnost je shodné zobrazení.*

Samodružné body a směry osově souměrnosti

Každá shodnost je unikátní svou kombinací samodružných bodů a směrů. Později tuto skutečnost využijeme ke klasifikaci shodností.

Věta 6 (Alternativní definice osově souměrnosti). *Shodné zobrazení, jehož všechny samodružné body vyplní přímku o , je souměrnost podle osy o .*

Věta 7. *Jestliže existují na přímce dva různé samodružné body, pak každý bod této přímky je samodružný.*

Věta 8. *Má-li shodnost aspoň tři nekolineární samodružné body, je to identita.*

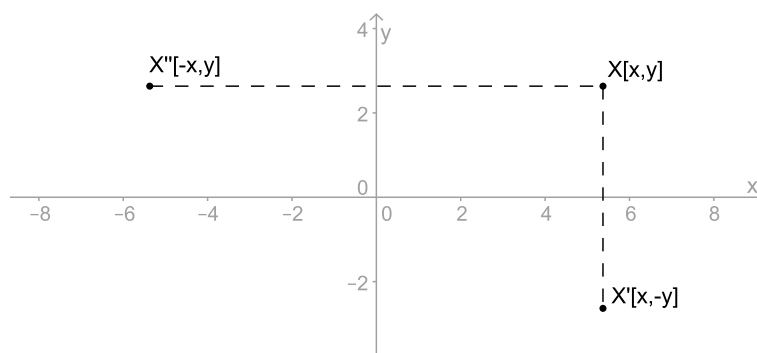
Věta 9. *Má-li shodnost dva různé samodružné body a není identitou, pak je osovou souměrností.*

Věta 10. *Samodružné přímky osově souměrnosti jsou přímky kolmé na osu souměrnosti.*

4.2.1 Analytické vyjádření osově souměrnosti $O(o)$ v rovině

PŘÍKLAD 4.4. *Napište analytické vyjádření osově souměrnosti s osou v souřadnicové ose x (y).*

Řešení: Dle obrázku 13 je zřejmé, že uvedené osově souměrnosti mají níže uvedená analytická vyjádření.



Obrázek 13: Odvození rovnic osově souměrnosti s osou v souřadnicové ose x (y)

Osová souměrnost s osou x :

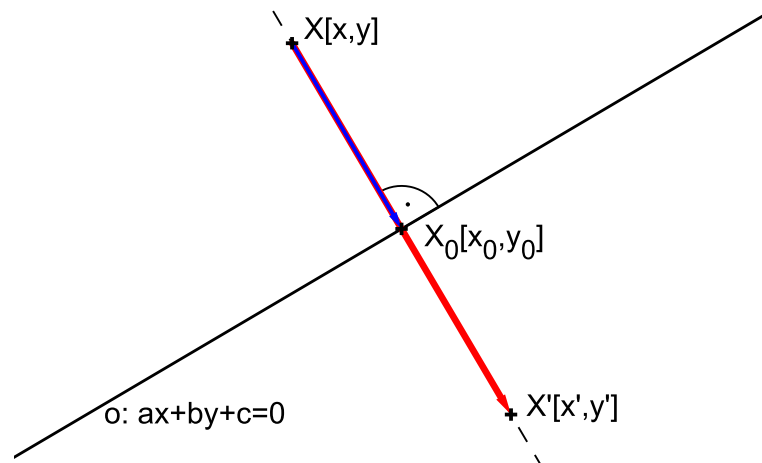
$$\begin{aligned}x' &= x \\y' &= -y\end{aligned}$$

Osová souměrnost s osou y :

$$\begin{aligned}x' &= -x \\y' &= y\end{aligned}$$

Ne vždy je ale možné osu souměrnosti takto výhodně umístit do souřadnicové osy. Proto si odvodíme rovnice osové souměrnosti s obecně umístěnou osou.

Osová souměrnost podle osy o dané rovnicí $o : ax + by + c = 0$



Obrázek 14: Odvození rovnic osové souměrnosti $O(o)$

Dle obrázku 14 platí

$$\begin{aligned} X' - X &= 2(X_0 - X), \\ X_0 - X &= k(a, b). \end{aligned}$$

Z druhé rovnosti vyjádříme $x_0 = x + ka, y_0 = y + kb$ a dosadíme je do obecné rovnice osy o : $a(x + ka) + b(y + kb) + c = 0$. Odsud potom vyjádříme parametr $k = -\frac{ax + by + c}{a^2 + b^2}$, který dosadíme do rovnice

$$X' - X = 2k(a, b).$$

Po úpravě a rozepsání po složkách dostáváme rovnice osové souměrnosti $O(o)$:

$$\begin{aligned} x' &= x - \frac{2a}{a^2 + b^2} (ax + by + c) \\ y' &= y - \frac{2b}{a^2 + b^2} (ax + by + c) \end{aligned}$$

PŘÍKLAD 4.5. V eukleidovské rovině je dána souměrnost podle přímky $p : 3x - 4y + 1 = 0$. Napište rovnice této souměrnosti.