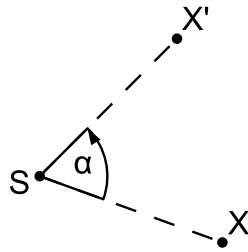


4.3 Otočení

Definice 17. **Otočení** neboli **rotace** je zobrazení určené středem S a orientovaným úhlem velikosti φ , které bodu S přiřazuje týž bod S a libovolnému bodu $X \neq S$ přiřazuje bod X' tak, že $|X'S| = |XS|$ a orientovaný úhel XSX' má velikost φ . Zobrazení značíme $\mathcal{R}(S, \varphi)$, bod S se nazývá střed otočení a orientovaný úhel velikosti φ je úhel otočení.



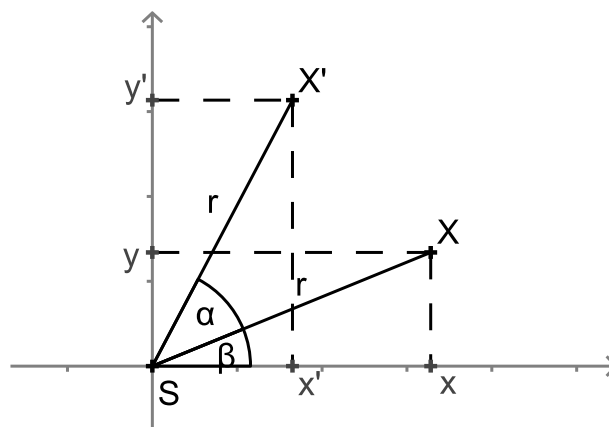
Obrázek 15: Otočení $\mathcal{R}(S, \alpha)$

Shodnost, která není ani identitou ani osovou souměrností, má nejvýše jeden samodružný bod

Věta 12 (Alternativní definice otočení). *Shodnost s právě jedním samodružným bodem S je otočením; bod S je střed otočení.*

PŘÍKLAD 4.6. *Odvoďte analytické vyjádření otočení se středem v počátku souřadnicové soustavy o úhel α . Potom ukažte, že toto zobrazení má jediný samodružný bod - střed otočení.*

Řešení: Postupujeme podle obrázku 16.



Obrázek 16: Otočení $\mathcal{R}([0, 0], \alpha)$

Rovnice otočení o úhel α kolem počátku jsou

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \alpha - y \sin \alpha \\y' &= x \sin \alpha + y \cos \alpha\end{aligned}$$

Věta 13. Složením dvou osových souměrností s různoběžnými osami vznikne otočení, jehož středem je průsečík těchto os.

Věta 14. Každé otočení lze složit ze dvou osových souměrností, jejichž osy jsou různoběžky procházející středem otočení. Jednu z těchto os lze volit libovolně tak, že prochází středem otočení. Druhá je touto volbou určena jednoznačně.

Věta 15. Otočení se středem S a úhlem velikosti α převádí přímku p v přímku p' různoběžnou s p ; přitom dva vrcholové úhly, které p a p' tvoří, mají velikost α .

Analytické vyjádření otočení (rotace) $\mathbf{R}(S, \alpha)$ v rovině

Souřadnice středu: $S = [s_1, s_2]$

$$\begin{aligned}x' &= (x - s_1) \cos \alpha - (y - s_2) \sin \alpha + s_1 \\y' &= (x - s_1) \sin \alpha + (y - s_2) \cos \alpha + s_2\end{aligned}$$

Po úpravě dostaneme:

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \alpha - y \sin \alpha + s_1 - s_1 \cos \alpha + s_2 \sin \alpha \\y' &= x \sin \alpha + y \cos \alpha + s_2 - s_1 \sin \alpha - s_2 \cos \alpha\end{aligned}$$

PŘÍKLAD 4.7. Afinní zobrazení euklidovské roviny na sebe zobrazuje vrchol A trojúhelníku ABC na bod B , bod B na bod C a bod C na bod A . Může to být zobrazení shodné? Jestliže ano, napište jeho rovnice vzhledem k vhodně zvolené kartézské soustavě souřadnic.