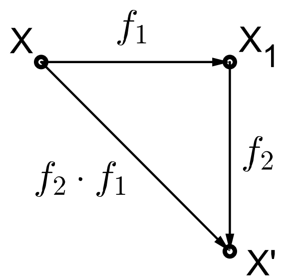
5 Skládání shodností v rovině

5.1 Skládání afinních zobrazení

Definice 21 (Skládání afinních zobrazení)**.** *Nechť f_1 je afinní zobrazení prostoru A do A', f_2 afinní zobrazení prostoru A' do A''. Jestliže každému bodu $X \in A$ je v f_1 přiřazen bod $X_1 = f_1(X) \in A'$ a bodu $X_1 = f_1(X)$ přiřazen bod $X' = f_2(f_1(X)) \in A''$, říkáme, že zobrazení f přiřazující bodu X bod $X' = f_2(f_1(X))$ vzniklo složením zobrazení f_1 a f_2. Zapisujeme $f = f_2 \cdot f_1$, $f = f_2 f_1$, $f = f_2 \circ f_1$ nebo $f = f_2(f_1(X))$.*



Obrázek 22: Skládání zobrazení f_1 a f_2

Věta 23. *Složením dvou afinních zobrazení f_1, f_2 vznikne opět afinní zobrazení f. Zobrazení φ asociované k f vznikne složením zobrazení φ_1, φ_2 asociovaných po řadě k f_1, f_2.*

5.2 Skládání shodností v rovině

PŘÍKLAD 5.1. *V prostoru E_2 jsou dány dvě středové souměrnosti $\mathcal{S}_1$ a $\mathcal{S}_2$. Určete zobrazení $Z_1 = \mathcal{S}_2 \cdot \mathcal{S}_1$ a $Z_2 = \mathcal{S}_1 \cdot \mathcal{S}_2$.*

Řešení: Složením středové souměrnosti $\mathcal{S}_1$ se středem S_1 a středové souměrnosti $\mathcal{S}_2$ se středem $S_2 \neq S_1$ vznikne translace $\mathcal{T}(2(S_2 - S_1))$. Je-li $S_1 \equiv S_2$ je $\mathcal{S}_2\mathcal{S}_1$ identita.

PŘÍKLAD 5.2. *Může v rovině existovat útvar, který má dva středy souměrnosti?*

PŘÍKLAD 5.3. *V prostoru E_n je dáno posunutí T a středová souměrnost S. Určete zobrazení $Z_1 = TS$ a $Z_2 = ST$.*

Řešení: Složením posunutí a středové souměrnosti v libovolném pořadí vznikne středová souměrnost.

PŘÍKLAD 5.4. *Rozhodněte, jaké zobrazení vznikne složením translace $\mathcal{T}$ a rotace $\mathcal{R}$, která není středovou souměrností. Uvažujte obě pořadí skládání těchto zobrazení.*

Shrnutí

- Složením (v libovolném pořadí) translace $\mathcal{T}$ a rotace $\mathcal{R}$, která není středovou souměrností, vznikne rotace téhož smyslu i úhlu jako $\mathcal{R}$.
- Složením dvou translací vznikne translace nebo identita.
- Složením posunutí a středové souměrnosti v libovolném pořádku vznikne středová souměrnost.
- Složením středové souměrnosti $\mathcal{S}_1$ se středem S_1 a středové souměrnosti $\mathcal{S}_2$ se středem $S_2 \neq S_1$ vznikne translace $\mathcal{T}(S_1 \to S_2')$, přičemž úsečka S_1S_2' má střed S_2. Je-li $S_1 \equiv S_2$ je $\mathcal{S}_2\mathcal{S}_1$ identita.

5.3 Shodnosti přímé a nepřímé

(a) Přímou shodnost lze rozložit v sudý počet osových souměrností, nepřímou shodnost v lichý počet osových souměrností.

(b) Složíme-li dvě shodnosti přímé nebo dvě shodnosti nepřímé, dostaneme shodnost přímou; složíme-li shodnost přímou a nepřímou, vznikne shodnost nepřímá.

5.4 Grupa shodností v rovině

Poznatky získané řešením výše uvedených příkladů nasvědčují tomu, že *množina shodností* v rovině spolu *s operací skládání zobrazení* tvoří grupu[1]. Některé podmnožiny množiny shodností navíc tvoří spolu s operací skládání zobrazení podgrupy.

PŘÍKLAD 5.5. *Ověřte následující tvrzení:*

(a) Všechny shodnosti v rovině tvoří grupu G_S.

(b) Všechny přímé shodnosti tvoří podgrupu G_S' grupy G_S.

(c) Množina všech translací doplněná identitou, tvoří grupu, která je podgrupou grupy přímých shodností.

[1]Množinu G, v níž je definována operace $\circ$ nazýváme grupou vzhledem k operaci $\circ$ (značíme $(G, \circ)$), právě když:
a) Výsledek operace $\circ$ je pro každou dvojici prvků G opět prvkem G (říkáme, že operace $\circ$ je na G neomezeně definovaná, nebo, že množina G je uzavřená vzhledem k operaci $\circ$).
b) Operace $\circ$ je asociativní v množině G.
c) Operace $\circ$ má neutrální prvek $n \in G$.
d) Ke každému prvku $k \in G$ existuje inverzní prvek $k^{-1} \in G$ vzhledem k operaci $\circ$.
Je-li navíc operace $\circ$ komutativní v množině G, nazýváme algebraickou strukturu $(G, \circ)$ komutativní grupou.

(d) Množina všech translací a středových souměrností, doplněná identitou, tvoří podgrupu grupy G'_S.

PŘÍKLAD 5.6. *Trojúhelník ABC byl převeden otočením daného smyslu se středem S a úhlem velikosti $\omega = 120^\circ$ v trojúhelník $A_1B_1C_1$, který byl dále převeden posunutím $\mathcal{T}(A_1 \to A_2)$ v trojúhelník $A_2B_2C_2$. Určete otočení, které převádí přímo $\triangle ABC$ v $\triangle A_2B_2C_2$.*

PŘÍKLAD 5.7. *Je dán rovnostranný trojúhelník ABC. Najděte všechny shodnosti, které převádějí tento trojúhelník do něho samého. Zkoumejte vlastnosti množiny těchto shodností spolu s operací skládání shodností.*