6 Klasifikace shodností roviny

Myšlenka úplné klasifikace shodností: Klasifikace shodností roviny je založena na výpočtu samodružných bodů a směrů zobrazení, které je dáno rovnicí

$$f:\ X' = A \cdot X + B. \tag{31}$$

Viz též (18) a (19) na straně 17. Postup tohoto výpočtu a způsob identifikace příslušného zobrazení pomocí jeho samodružných bodů a směrů je ilustrován podrobným řešením příkladu 4.2 na stranách 22–26.

Poznámka. V řešení příkladu 4.2 jsme neuvedli úplné popisy identifikovaných shodností. V případě otočení (viz str. 25) jsme neurčili úhel α. U posunutého zrcadlení (viz str. 26) jsme se nevěnovali nalezení osy o a vektoru posunutí $\vec{t}$. Nyní již máme všechny znalosti potřebné k tomu, abychom tyto údaje nalezli.

6.1 Klasifikace shodností roviny

Z podmínky $A^T \cdot A = E$ plyne, že afinní zobrazení určené rovnicemi

$$\begin{array}{rcrcrcr} x' & = & a_{11}x & + & a_{12}y & + & b_1 \\ y' & = & a_{21}x & + & a_{22}y & + & b_2, \end{array}$$

je shodností právě tehdy, když platí rovnosti

$$\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{21}^2 = a_{12}^2 + a_{22}^2 &= 1 \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = a_{12}a_{11} + a_{22}a_{21} &= 0 \end{aligned}$$

Vzhledem k platnosti vztahu $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ je zřejmé, že existuje úhel $\alpha \in \langle 0°; 360°)$ takový, že lze napsat

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos\alpha, \\ a_{21} &= \sin\alpha, \\ a_{12}\cos\alpha + a_{22}\sin\alpha &= 0, \\ a_{22} &= \varepsilon\cos\alpha, \\ a_{12} &= -\varepsilon\sin\alpha, \text{kde } \varepsilon = \pm 1. \end{aligned}$$

Hodnota ε určuje, zda se jedná o shodnost přímou ($\varepsilon = 1$) nebo nepřímou ($\varepsilon = -1$).

I. Přímé shodnosti

Každou přímou shodnost v rovině můžeme vyjádřit rovnicemi ve tvaru

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha + b_1, \\ x_2' &= x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha + b_2. \end{aligned}$$

Samodružné body

Samodružné body přímé shodnosti jsou řešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x_1(1-\cos\alpha) + x_2 \sin\alpha &= b_1, \\ -x_1 \sin\alpha + x_2(1-\cos\alpha) &= b_2. \end{aligned} \tag{32}$$

Nejprve nás bude zajímat přímá shodnost v rovině, která má právě jeden samodružný bod. Soustava (32) má právě jedno řešení, pokud je regulární, tj. pokud pro její determinant platí

$$\begin{vmatrix} (1-\cos\alpha), & \sin\alpha \\ -\sin\alpha, & (1-\cos\alpha) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Po úpravě dostaneme

$$2(1-\cos\alpha) \neq 0,$$

což vede k podmínce

$$\cos\alpha \neq 1.$$

Tak dostáváme

1) OTOČENÍ (ROTACI).

Stačí volit počátek soustavy souřadné v onom jediném samodružném bodě a dostaneme známé vyjádření otočení kolem počátku o úhel α:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha, \\ x_2' &= x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha. \end{aligned}$$

Samodružné směry

Samodružné směry (tj. vektory těchto směrů) přímé shodnosti jsou **netriviálním** řešením soustavy homogenních rovnic

$$\begin{aligned} u_1(\lambda-\cos\alpha) + u_2 \sin\alpha &= 0, \\ -u_1 \sin\alpha + u_2(\lambda-\cos\alpha) &= 0. \end{aligned} \tag{33}$$

Ta má netriviální (tj. nekonečně mnoho) řešení právě tehdy, když je splněna charakteristická rovnice přímé shodnosti v rovině

$$\begin{vmatrix} (\lambda - \cos\alpha), & \sin\alpha \\ -\sin\alpha, & (\lambda - \cos\alpha) \end{vmatrix} = 0. \tag{34}$$

Úpravou (34) dostaneme rovnici

$$(\lambda - \cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha = 0,$$

která je splněna za předpokladu, že $\sin\alpha = 0$ a zároveň $\cos\alpha = \lambda$, kde $\lambda = \pm 1$[1].

Pro $\cos\alpha = -1$ dostáváme

2) STŘEDOVOU SOUMĚRNOST

s analytickým vyjádřením

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_1 + b_1, \\ x_2' &= -x_2 + b_2. \end{aligned}$$

Je-li $\cos\alpha = 1$, dostaneme pro $b_1 = b_2 = 0$,

3) IDENTITU

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 \\ x_2' &= x_2 \end{aligned}$$

a pro $b_1 \neq 0 \vee b_2 \neq 0$

4) POSUNUTÍ

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + b_1 \\ x_2' &= x_2 + b_2. \end{aligned}$$

II. Nepřímé shodnosti

Každou nepřímou shodnost v rovině můžeme vyjádřit rovnicemi ve tvaru

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1\cos\alpha + x_2\sin\alpha + b_1 \\ x_2' &= x_1\sin\alpha - x_2\cos\alpha + b_2. \end{aligned}$$

Samodružné směry

K vyšetření nepřímých shodností použijeme samodružné směry. Řešením charakteristické rovnice

$$\begin{vmatrix} (\lambda - \cos\alpha), & -\sin\alpha \\ -\sin\alpha, & (\lambda + \cos\alpha) \end{vmatrix} = 0, \tag{35}$$

[1] Pro shodná zobrazení je $|\lambda| = 1$. Jinak by vektor $\vec{u}$ samodružného směru v zobrazení $\varphi(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$ nezachoval svou velikost.

dostaneme podmínku

$$\lambda = \pm 1,$$

která odpovídá tomu, že uvažované zobrazení má dva navzájem kolmé samodružné směry. Jeden, pro $\lambda = 1$, se zachovává, druhý, pro $\lambda = -1$, se mění v opačný. Volme soustavu souřadnou tak, aby osa x měla směr odpovídající $\lambda = 1$. Směr osy y pak zřejmě odpovídá $\lambda = -1$. Potom je nepřímá shodnost popsána rovnicemi

$$\begin{array}{rcrcl} x_1' & = & x_1 & + & b_1 \\ x_2' & = & -x_2 & + & b_2. \end{array}$$

Pokud je $b_1 = 0$, má uvažované zobrazení **přímku samodružných bodů** a jedná se tedy o

5) OSOVOU SOUMĚRNOST

$$\begin{array}{rcrcl} x_1' & = & x_1 & & \\ x_2' & = & -x_2 & + & b_2. \end{array}$$

Pokud je ale $b_1 \neq 0$, má pouze **samodružnou přímku** a jedná se o

6) POSUNUTÉ ZRCADLENÍ.