

8 Stejnolehlost

Patří mezi tzv. homotetie, tj. afinní zobrazení, která mají všechny směry samodružné.

Definice 23. *Budiž dán bod S a reálné číslo κ (různé od 0 a 1). Stejnolehlost $H(S; \kappa)$ se středem S a koeficientem κ je zobrazení, které každému bodu X roviny přiřadí bod X' tak, že*

$$\overrightarrow{SX'} = \kappa \overrightarrow{SX}.$$

Poznámka. Stejnolehlost můžeme definovat i více popisně: *Budiž dán bod S a reálné číslo κ (různé od 0 a 1). Stejnolehlost $H(S; \kappa)$ se středem S a koeficientem κ je zobrazení, které každému bodu X roviny přiřadí bod X' tímto způsobem:*

1. Pro $X \equiv S$ je $X' \equiv X$,
2. Pro $X \neq S$ je $|X'S| = |\kappa| \cdot |XS|$,
pro $\kappa > 0$ leží X' leží na polopřímce \overrightarrow{SX} a
pro $\kappa < 0$ leží X' leží na polopřímce opačné k \overrightarrow{SX} .

Poznámka. Zobrazení inverzní k stejnoolehlosti $H(S; \kappa)$ je stejnoolehlost $H^{-1}\left(S; \frac{1}{\kappa}\right)$.

Základní vlastnosti stejnoolehlosti $H(S, \kappa)$:

1. Obrazem přímky je přímka s ní rovnoběžná.
2. Obrazem úsečky AB je úsečka $A'B'$; $|A'B'| = |\kappa| \cdot |AB|$.
3. Obrazem polopřímky je polopřímka s ní souhlasně ($\kappa > 0$) nebo nesouhlasně ($\kappa < 0$) rovnoběžná .
4. Obrazem úhlu $\angle AVB$ je úhel $\angle A'V'B'$; $|\angle A'V'B'| = |\angle AVB|$.

PŘÍKLAD 8.1. *Jsou dány dva různé body A, B a reálné číslo $\lambda \neq 0, 1$. Najděte na přímce AB bod C tak, aby platilo $(ABC) = \lambda$.*

8.1 Analytické vyjádření stejnolehlosti

Rovnice stejnolehlosti $H(S; \kappa)$: $H : X' = \kappa X + (1 - \kappa)S$.

PŘÍKLAD 8.2. *Napište rovnice stejnolehlosti afinní roviny \mathbf{A}_2 , která zobrazuje bod $B = [2, 0, -1]$ na bod $C = [0, 1, 3]$ a má koeficient $\kappa = -2$. Najděte souřadnice jejího středu.*

Řešení v programu wxMaxima:

```
(%i1) B:[2,0,-1]$ C:[0,1,3]$ S:[s1,s2,s3]$
```

```
(%i4) H:C-S=-2*(B-S);
```

```
(%o4) [-s1, 1 - s2, 3 - s3] = [-2 (2 - s1), 2 s2, -2 (-s3 - 1)]
```

```
(%i5) res:solve(lhs(H)-rhs(H), [s1,s2,s3])[1];
```

```
(%o5) [s1 =  $\frac{4}{3}$ , s2 =  $\frac{1}{3}$ , s3 =  $\frac{1}{3}$ ]
```

```
(%i6) S:ev(S,res);
```

```
(%o6) [ $\frac{4}{3}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{3}$ ]
```

8.2 Skládání stejnolehlostí

Věta 28 (O skládání stejnolehlosti a translace). *Zobrazení složené ze stejnolehlosti $H(S; \kappa)$ a translace $X' = X + \vec{t}$ je stejnolehlost $H'(Q; \kappa)$, kde $Q = S + \frac{1}{1 - \kappa}\vec{t}$.*

Věta 29 (O skládání stejnolehlostí). *Složením dvou stejnolehlostí $H_1(S_1, \kappa_1)$, $H_2(S_2, \kappa_2)$ vznikne*

1. *IDENTITA*, jestliže $\kappa_1\kappa_2 = 1$ a $S_1 = S_2$,

2. *POSUNUTÍ*, jestliže $\kappa_1\kappa_2 = 1$ a $S_1 \neq S_2$,

3. *STEJNOLEHLOST* $H(S, \kappa)$ s koeficientem $\kappa = \kappa_1\kappa_2$, jestliže $\kappa_1\kappa_2 \neq 1$. Přitom, pro $S_1 = S_2$ je také $S = S_1 = S_2$, pro $S_1 \neq S_2$ leží bod S na přímce S_1S_2 .