8.3 Stejnolehlost kružnic

Pro dvě kružnice $k_1(S_1; r_1)$, $k_2(S_2; r_2)$ s různými poloměry existují právě dvě stejnolehlosti, které převádějí kružnici k_1 do kružnice k_2: $\mathrm{H}_1(E, r_2/r_1)$ a $\mathrm{H}_2(I, -r_2/r_1)$ (Bod E se někdy označuje jako „vnější střed stejnolehlosti“, bod I potom jako „vnitřní střed stejnolehlosti“.). Jestliže se kružnice dotýkají v bodě T, je $T = I$ v případě vnějšího dotyku a $T = E$ v případě vnitřního dotyku kružnic.

Věta 30 (Mongeova věta)**.** *Jsou-li k_1, k_2, k_3 tři kružnice, které mají různé poloměry a jejichž středy neleží v přímce, platí pro vnější a vnitřní středy stejnolehlostí každých dvou z nich následující vztahy:*

i) Všechny tři vnější středy stejnolehlosti E_{12}, E_{13}, E_{23} leží v přímce.

ii) Každé dva vnitřní středy stejnolehlosti a jeden vnější leží v přímce.

iii) Tři vnitřní středy stejnolehlosti I_{12}, I_{13}, I_{23} neleží v přímce.

PŘÍKLAD 8.3. *Je dána kružnice k, přímka p, která je vnější přímkou kružnice k, a bod $A \in p$. Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají přímky p v bodě A a kružnice k.*

PŘÍKLAD 8.4. *Jsou dány dvě různoběžky a, b a bod M, který leží uvnitř jednoho jejich úhlu. Sestrojte všechny kružnice, které procházejí bodem M a dotýkají se přímek a, b.*

PŘÍKLAD 8.5. *Jsou dány dvě různoběžky m, n a kružnice k ležící uvnitř jednoho jejich úhlu. Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají přímek m, n i kružnice k.*

PŘÍKLAD 8.6. (Eulerova přímka) *V trojúhelníku ABC označme T těžiště, V průsečík výšek a S střed kružnice trojúhelníku opsané. Máme dokázat, že buď všechny tři body splynou v jediný, nebo jsou navzájem různé a leží na jedné přímce (Eulerova přímka) tak, že platí $(S, V; T) = -\frac{1}{2}$.*

PŘÍKLAD 8.7. (Kružnice devíti bodů, též Feuerbachova či Eulerova kružnice) *V trojúhelníku ABC označme V průsečík výšek, S střed kružnice opsané, C_1, A_1, B_1 středy stran AB, BC, CA. Nechť k_0 je kružnice procházející body A_1, B_1, C_1. Dokažte:*

1) Na kružnici k_0 leží též paty A_0, B_0, C_0 výšek v_a, v_b, v_c a středy úseček AV, BV, CV.

2) Střed kružnice k_0 je středem úsečky SV, pokud $S \not\equiv V$; pokud je $S \equiv V$ splyne střed k_0 s bodem S.

3) Poloměr kružnice k_0 je roven polovině poloměru kružnice trojúhelníku opsané.

PŘÍKLAD 8.8. *Platí tato věta: Jsou-li dány dvě rovnoběžné úsečky různých délek, existují právě dvě stejnolehlosti, které zobrazí první úsečku na druhou. Dokážete je vždy najít?*