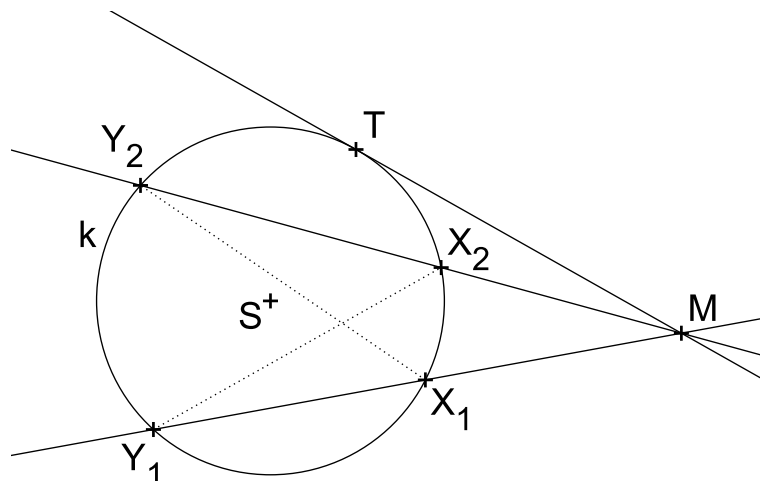


9 Mocnost bodu ke kružnici

Definice 24. Mocností bodu M ke kružnici $k(S; r)$ rozumíme reálné číslo m , pro které platí:

- (1) $|MX| \cdot |MY| = |m|$, kde X, Y jsou průsečíky kružnice k s její libovolnou sečnou procházející bodem M .
- (2) Je-li M vnějším bodem kružnice k , je $m > 0$.
- (3) Je-li M vnitřním bodem kružnice k , je $m < 0$.
- (4) Je-li $M \in k$, je $m = 0$.



Obrázek 25: Mocnost bodu M ke kružnici k

Věta 32. Je dána kružnice $k(S; r)$ a bod M , který na ní neleží. Potom pro libovolné dvě sečny kružnice k , které procházejí bodem M , jejichž průsečíky s kružnicí k označíme X_1, Y_1 a X_2, Y_2 , platí

$$|MX_1| \cdot |MY_1| = |MX_2| \cdot |MY_2|.$$

Věta 33. Nechť je dána kružnice $k(S; r)$ a bod M . Potom pro mocnost m bodu M ke kružnici k platí

$$m = d^2 - r^2,$$

kde $d = |MS|$ je vzdálenost bodu M od středu kružnice k .

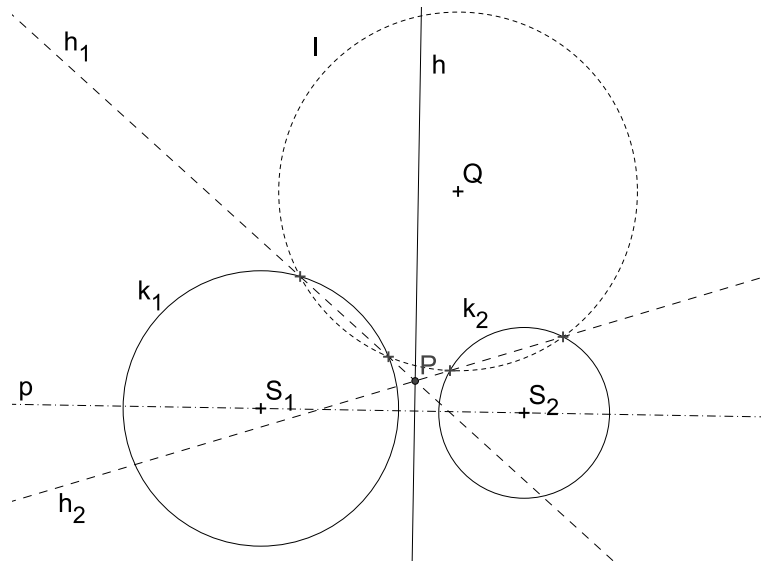
Věta 34. Nechť M je vnější bod kružnice $k(S; r)$, m jeho mocnost ke kružnici k . Jestliže T je dotykový bod tečny vedené z bodu M ke kružnici k , tak platí $|MT|^2 = m$.

9.1 Chordála a potenční střed

Věta 35 (Chordála dvojice kružnic). *Nechť jsou $k_1(S_1; r_1), k_2(S_2; r_2)$ dvě nesoustředné kružnice. Množina bodů X , které mají k oběma kružnicím stejnou mocnost, je přímka $h \perp S_1S_2$. Jestliže kružnice k_1, k_2 mají společný bod M , potom přímka h prochází tímto bodem.*

Poznámka. Přímka h , která je množinou bodů X , majících stejnou mocnost k nesoustředným kružnicím k_1, k_2 se nazývá **chordála** (též potenční přímka) kružnic k_1, k_2 .

Poznámka. Bod, který má ke třem vzájemně různým kružnicím stejnou mocnost se nazývá **potenční bod** (též potenční střed).



Obrázek 26: Chordála h kružnic k_1, k_2 , potenční bod P kružnic k_1, k_2, l

Analytické vyjádření chordály

Chordálu kružnic $k_1(S_1[m_1, n_1], r_1), k_2(S_2[m_2, n_2], r_2)$ s rovnicemi $k_1 : (x - m_1)^2 + (y - n_1)^2 = r_1^2$ a $k_2 : (x - m_2)^2 + (y - n_2)^2 = r_2^2$ můžeme analyticky vyjádřit rovnicí:

$$(x - m_1)^2 + (y - n_1)^2 - r_1^2 = (x - m_2)^2 + (y - n_2)^2 - r_2^2 \quad (36)$$

PŘÍKLAD 9.1. *Sestrojte chordálu dvou nesoustředných kružnic k_1, k_2 , které nemají společný bod.*

PŘÍKLAD 9.2. Určete analyticky množinu všech bodů roviny, které mají ke dvěma daným kružnicím stejnou mocnost.

PŘÍKLAD 9.3. Sestrojte kružnici k , která prochází danými body $A \neq B$ a dotýká se dané přímky t .

9.2 Cvičení – Mocnost bodu ke kružnici

64. Je dán úhel $\angle AVB$ a uvnitř něho bod M . Sestrojte kružnici, která prochází bodem M a dotýká se přímek AV, BV .

65. Obdélník má velikosti stran a, b . Máme sestrojit

a) libovolný obdélník stejného obsahu,

b) obdélník stejného obsahu, jehož jedna strana má danou velikost c .

66. Jsou dány dvě nesoustředné kružnice k_1, k_2 a přímka p . Na této přímce určete bod P tak, aby tečny z něho vedené ke kružnicím k_1, k_2 měly stejnou délku.

67. Sestrojte kružnici, která se dotýká dané kružnice $k(S; r)$ a prochází dvěma různými body A, B , které leží vně dané kružnice k .

68. Je dán lichoběžník $ABCD$ se základnami AB, CD , $|AB| > |CD|$. Uvnitř úsečky AD sestrojte bod P a uvnitř úsečky BC bod Q tak, aby platilo zároveň $PQ \parallel AB$ a $PC \parallel AQ$.

69. Sestrojte lichoběžník $ABCD$, jsou-li dány délky jeho ramen $|BC| = 4.5\text{cm}$, $|DA| = 3\text{cm}$ a velikost 75° úhlu, který svírají přímky BC a AD , platí-li navíc $|AB| \cdot |CD| = |AC|^2$.