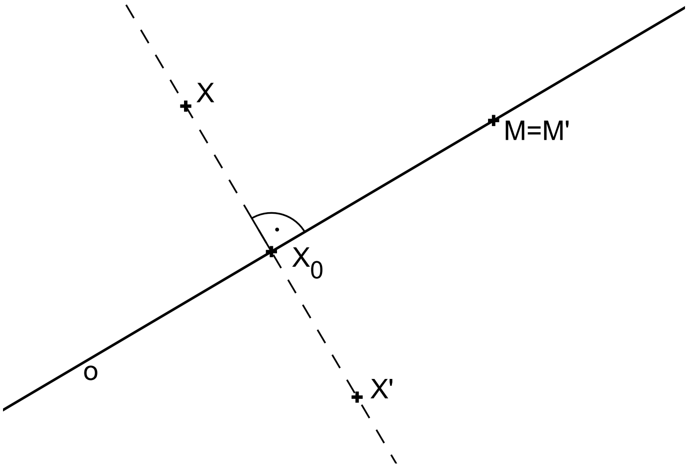
5.2 Osová souměrnost

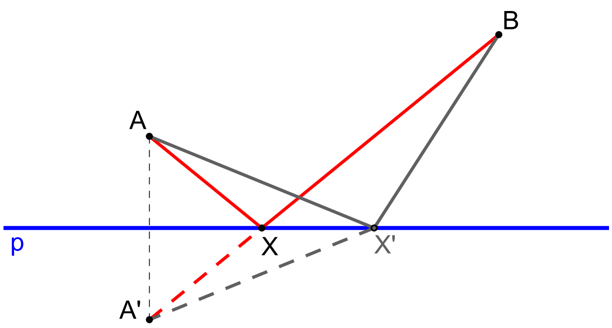
Definice 18. *Nechť je dána přímka o, kterou nazýváme* **osa souměrnosti.** *Potom pro obraz M' libovolného bodu M této přímky o platí $M' \equiv M$. Ke každému bodu X, který neleží na přímce o, sestrojíme obraz X' následujícím způsobem: Bodem X vedeme kolmici k na přímku o a její patu označíme X_0. Na polopřímce opačné k polopřímce X_0X sestrojíme bod X' tak, že $|X'X_0| = |XX_0|$. Takto definované zobrazení nazýváme* **osová souměrnost s osou** *o a značíme ho $\mathcal{O}(o)$.*



Obrázek 19: Definice osové souměrnosti

Poznámky:
1. O bodech X, X' říkáme, že je to dvojice bodů souměrně sdružených podle osy o.
2. Osová souměrnost je příkladem involutorního zobrazení (involuce).

PŘÍKLAD 5.3. *Je dána přímka p a body A, B v téže polorovině s hraniční přímkou p. Najděte všechny body $X \in p$ takové, že součet vzdáleností $|AX| + |BX|$ je minimální.*



Obrázek 20: Využití osové souměrnosti ke geometrickému řešení příkladu 20

Věta 5. *Osová souměrnost je shodné zobrazení.*

Samodružné body a směry osové souměrnosti

Každá shodnost je unikátní svou kombinací samodružných bodů a směrů. Později tuto skutečnost využijeme ke klasifikaci shodností.

Věta 6 (Alternativní definice osové souměrnosti)**.** *Shodné zobrazení, jehož všechny samodružné body vyplní přímku o, je souměrnost podle osy o.*

Věta 7. *Jestliže existují na přímce dva různé samodružné body, pak každý bod této přímky je samodružný.*

Věta 8. *Má-li shodnost aspoň tři nekolineární samodružné body, je to identita.*

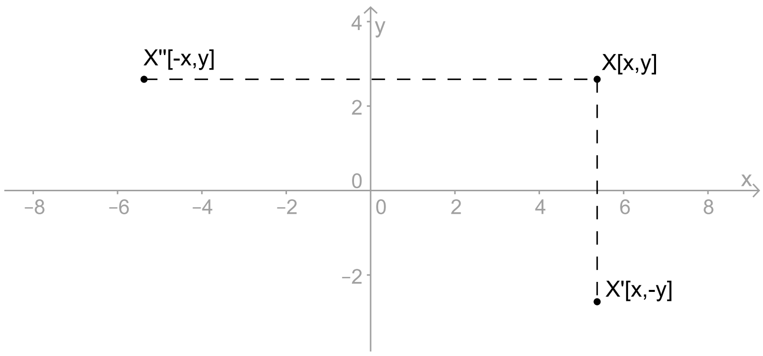
Věta 9. *Má-li shodnost dva různé samodružné body a není identitou, pak je osovou souměrností.*

Věta 10. *Samodružné přímky osové souměrnosti jsou přímky kolmé na osu souměrnosti.*

5.2.1 Analytické vyjádření osové souměrnosti O(o) v rovině

PŘÍKLAD 5.4. *Napište analytické vyjádření osové souměrnosti s osou v souřadnicové ose x (y).*

Řešení: Dle obrázku 21 je zřejmé, že uvedené osové souměrnosti mají níže uvedená analytická vyjádření.



Obrázek 21: Odvození rovnic osové souměrnosti s osou v souřadnicové ose x (y)

Osová souměrnost s osou x:

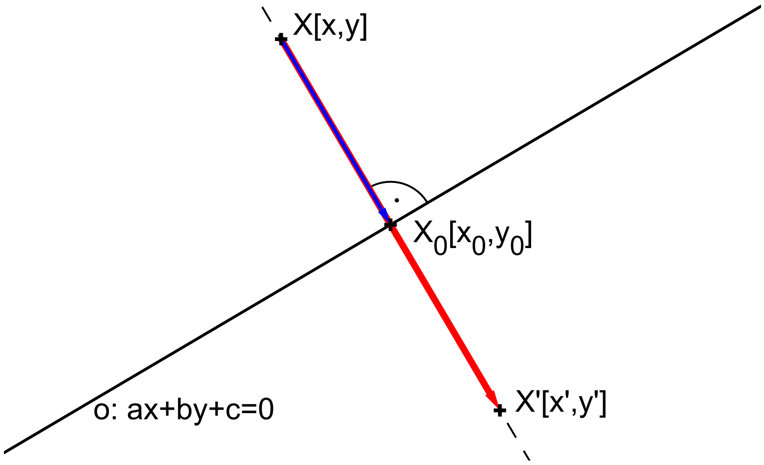
$$x' = x$$
$$y' = -y$$

Osová souměrnost s osou y:

$$x' = -x$$
$$y' = y$$

Ne vždy je ale možné osu souměrnosti takto výhodně umístit do souřadnicové osy. Proto si odvodíme rovnice osové souměrnosti s obecně umístěnou osou.

Osová souměrnost podle osy o **dané rovnicí** $o : ax + by + c = 0$



Obrázek 22: Odvození rovnic osové souměrnosti $O(o)$

Dle obrázku 22 platí

$$X' - X = 2(X_0 - X),$$
$$X_0 - X = k(a, b).$$

Z druhé rovnosti vyjádříme $x_0 = x + ka, y_0 = y + kb$ a dosadíme je do obecné rovnice osy o: $a(x + ka) + b(y + kb) + c = 0$. Odsud potom vyjádříme parametr $k = -\dfrac{ax + by + c}{a^2 + b^2}$, který dosadíme do rovnice

$$X' - X = 2k(a, b).$$

Po úpravě a rozepsání po složkách dostáváme rovnice osové souměrnosti $O(o)$:

$$x' = x - \frac{2a}{a^2 + b^2}\,(ax + by + c)$$
$$y' = y - \frac{2b}{a^2 + b^2}\,(ax + by + c)$$

PŘÍKLAD 5.5. *V eukleidovské rovině je dána souměrnost podle přímky* $p : 3x - 4y + 1 = 0$. *Napište rovnice této souměrnosti.*

5.2.2 Osová souměrnost - Úlohy

1. Dokažte **Vivianiho větu**.

Věta 11 (Vivianiho věta)**.** *V rovnostranném trojúhelníku je hodnota součtu vzdáleností libovolného bodu od stran trojúhelníku konstantní, nezávislá na poloze bodu.*

2. Řešte **Fagnanův problém**:
„Danému ostroúhlému trojúhelníku vepište trojúhelník o nejmenším obvodu.“

3. Proveďte následující tzv. **Mascheroniovu konstrukci**[1]:
„Je dána kružnice $k(S; r)$; dále je dána dvěma body A, B (body neleží na kružnici) její sečna p, která neprochází středem S. Sestrojte průsečíky přímky p s kružnicí k, aniž přitom použijete pravítka.“

4. Dokažte následující vlastnost **průsečíku výšek (ortocentra)** trojúhelníku:
„Body souměrně sdružené s průsečíkem výšek podle stran trojúhelníka, leží na kružnici trojúhelníku opsané.“

5. Napište rovnice souměrnosti podle přímky $o : 2x - 3y + 1 = 0$.

6. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dán obvod $o = 12cm$ a úhly $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$.

7. Jsou dány dvě různoběžky p, q a bod A mimo ně. Najděte body $B \in p$, $C \in q$ tak, aby obvod trojúhelníku ABC byl minimální.

8. Sestrojte konvexní čtyřúhelník $ABCD$ se stranami dané velikosti, je-li $\mapsto AC$ osou vnitřního úhlu při vrcholu A.

9. Sestrojte čtverec $ABCD$, je-li dáno $a + e = 10cm$.

10. Sestrojte obdélník $ABCD$, je-li dáno $e = 7cm$, $a - b = 1cm$.

11. Sestrojte lichoběžník $ABCD$ $(AB \| CD)$, je-li dáno $b = 3cm$, $c = 2.5cm$, $d = 2.6cm$, $\alpha - \beta = 20°$.

[1] *Lorenzo Mascheroni* (italský matematik, 1750–1800) dokázal ve své knize *Geometria del Compasso* (1797), že každá konstrukce realizovatelná užitím kružítka a pravítka bez měřítka se dá provést pouze pomocí kružítka. Proto se takovým konstrukcím říká Mascheroniovy konstrukce. Nutno však uvést, že důkaz téhož tvrzení publikoval více než sto let před Mascheronim dánský matematik *Georg Mohr*.

5.2.3 Osová souměrnost - Úlohy na domácí přípravu

12. Dokažte větu: „V každém trojúhelníku dělí osa libovolného vnitřního úhlu protější stranu v poměru stran přilehlých.“

13. Napište rovnice osové souměrnosti, zobrazující počátek na bod $[1, 5]$.

14. Je dána přímka p a dvě kružnice k_1, k_2 oddělené přímkou p. Sestrojte rovnostranný trojúhelník tak, aby na každé z kružnic k_1, k_2 byl jeden vrchol a jedna z výšek ležela na přímce p.

15. Jsou dány tři různé přímky p_1, p_2, p_3, procházející bodem S; na přímce p_1 je dán bod $A \neq S$. Sestrojte trojúhelník ABC, jehož osy vnitřních úhlů leží v přímkách p_1, p_2, p_3.

16. Jsou dány tři přímky o_1, o_2, o_3 procházející bodem O. Na o_1 dán bod A_1. Sestrojte $\triangle ABC$ tak, aby o_1, o_2, o_3 byly osami jeho stran a bod A_1 středem strany BC.

17. Jsou dány body X, Y a přímka p, která je odděluje. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC, jehož hlavním vrcholem je bod C, osou souměrnosti přímka p a jehož ramena mají danou velikost a. Přímka AC nechť prochází bodem X a přímka BC bodem Y.

18. Je dána přímka p a body A, B, ležící ve stejné polorovině s hraniční přímkou p. Sestrojte bod $X \in p$ tak, aby $|\angle AXp| = 2|\angle BXp|$.

19. Jsou dány body A, B, C a přímka p kolmá k přímce AB tak, že prochází bodem C a body A, B leží v téže polorovině určené přímkou p. Sestrojte na přímce p takový bod X, aby z něho byla vidět úsečka AB pod stejným úhlem jako úsečka BC.

20. Obrazy středu S kružnice opsané trojúhelníku ABC v osových souměrnostech podle přímek BC, AC, AB jsou vrcholy trojúhelníku $A_1B_1C_1$. Dokažte, že je tento trojúhelník shodný s trojúhelníkem ABC.