5.2.2 Osová souměrnost - Úlohy

1. Dokažte **Vivianiho větu**.

Věta 11 (Vivianiho věta)**.** *V rovnostranném trojúhelníku je hodnota součtu vzdáleností libovolného bodu od stran trojúhelníku konstantní, nezávislá na poloze bodu.*

2. Řešte **Fagnanův problém**:
„Danému ostroúhlému trojúhelníku vepište trojúhelník o nejmenším obvodu."

3. Proveďte následující tzv. **Mascheroniovu konstrukci**[1]:
„Je dána kružnice $k(S; r)$; dále je dána dvěma body A, B (body neleží na kružnici) její sečna p, která neprochází středem S. Sestrojte průsečíky přímky p s kružnicí k, aniž přitom použijete pravítka."

4. Dokažte následující vlastnost **průsečíku výšek (ortocentra)** trojúhelníku:
„Body souměrně sdružené s průsečíkem výšek podle stran trojúhelníka, leží na kružnici trojúhelníku opsané."

5. Napište rovnice souměrnosti podle přímky $o : 2x - 3y + 1 = 0$.

6. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dán obvod $o = 12cm$ a úhly $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$.

7. Jsou dány dvě různoběžky p, q a bod A mimo ně. Najděte body $B \in p$, $C \in q$ tak, aby obvod trojúhelníku ABC byl minimální.

8. Sestrojte konvexní čtyřúhelník $ABCD$ se stranami dané velikosti, je-li $\mapsto AC$ osou vnitřního úhlu při vrcholu A.

9. Sestrojte čtverec $ABCD$, je-li dáno $a + e = 10cm$.

10. Sestrojte obdélník $ABCD$, je-li dáno $e = 7cm$, $a - b = 1cm$.

11. Sestrojte lichoběžník $ABCD$ $(AB \| CD)$, je-li dáno $b = 3cm$, $c = 2.5cm$, $d = 2.6cm$, $\alpha - \beta = 20°$.

---

[1] *Lorenzo Mascheroni* (italský matematik, 1750–1800) dokázal ve své knize *Geometria del Compasso* (1797), že každá konstrukce realizovatelná užitím kružítka a pravítka bez měřítka se dá provést pouze pomocí kružítka. Proto se takovým konstrukcím říká Mascheroniovy konstrukce. Nutno však uvést, že důkaz téhož tvrzení publikoval více než sto let před Mascheronim dánský matematik *Georg Mohr*.

5.2.3 Osová souměrnost - Úlohy na domácí přípravu

12. Dokažte větu: „V každém trojúhelníku dělí osa libovolného vnitřního úhlu protější stranu v poměru stran přilehlých.“

13. Napište rovnice osové souměrnosti, zobrazující počátek na bod $[1, 5]$.

14. Je dána přímka p a dvě kružnice k_1, k_2 oddělené přímkou p. Sestrojte rovnostranný trojúhelník tak, aby na každé z kružnic k_1, k_2 byl jeden vrchol a jedna z výšek ležela na přímce p.

15. Jsou dány tři různé přímky p_1, p_2, p_3, procházející bodem S; na přímce p_1 je dán bod $A \neq S$. Sestrojte trojúhelník ABC, jehož osy vnitřních úhlů leží v přímkách p_1, p_2, p_3.

16. Jsou dány tři přímky o_1, o_2, o_3 procházející bodem O. Na o_1 dán bod A_1. Sestrojte $\triangle ABC$ tak, aby o_1, o_2, o_3 byly osami jeho stran a bod A_1 středem strany BC.

17. Jsou dány body X, Y a přímka p, která je odděluje. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC, jehož hlavním vrcholem je bod C, osou souměrnosti přímka p a jehož ramena mají danou velikost a. Přímka AC nechť prochází bodem X a přímka BC bodem Y.

18. Je dána přímka p a body A, B, ležící ve stejné polorovině s hraniční přímkou p. Sestrojte bod $X \in p$ tak, aby $|\angle AXp| = 2|\angle BXp|$.

19. Jsou dány body A, B, C a přímka p kolmá k přímce AB tak, že prochází bodem C a body A, B leží v téže polorovině určené přímkou p. Sestrojte na přímce p takový bod X, aby z něho byla vidět úsečka AB pod stejným úhlem jako úsečka BC.

20. Obrazy středu S kružnice opsané trojúhelníku ABC v osových souměrnostech podle přímek BC, AC, AB jsou vrcholy trojúhelníku $A_1B_1C_1$. Dokažte, že je tento trojúhelník shodný s trojúhelníkem ABC.