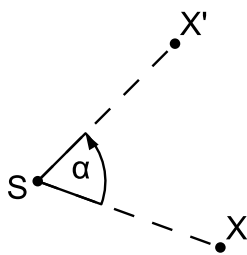


### 5.3 Otočení

**Definice 19. Otočení neboli rotace** je zobrazení určené středem  $S$  a orientovaným úhlem velikosti  $\varphi$ , které bodu  $S$  přiřazuje týž bod  $S$  a libovolnému bodu  $X \neq S$  přiřazuje bod  $X'$  tak, že  $|X'S| = |XS|$  a orientovaný úhel  $XSX'$  má velikost  $\varphi$ . Zobrazení značíme  $\mathcal{R}(S, \varphi)$ , bod  $S$  se nazývá střed otočení a orientovaný úhel velikosti  $\varphi$  je úhel otočení.



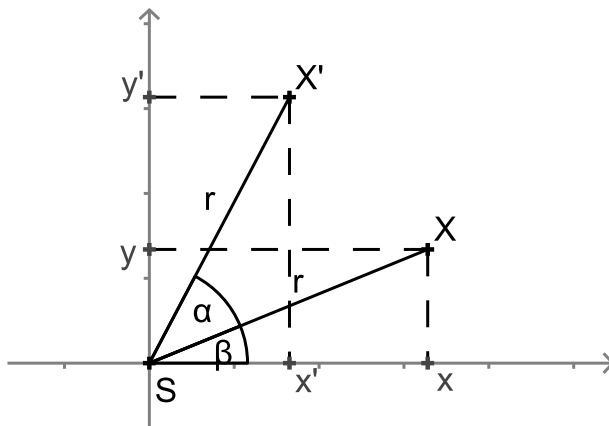
Obrázek 23: Otočení  $\mathcal{R}(S, \alpha)$

Shodnost, která není ani identitou ani osovou souměrností, má nejvýše jeden samodružný bod

**Věta 12** (Alternativní definice otočení). *Shodnost s právě jedním samodružným bodem  $S$  je otočením; bod  $S$  je střed otočení.*

**PŘÍKLAD 5.6.** *Odvoďte analytické vyjádření otočení se středem v počátku souřadnicové soustavy o úhel  $\alpha$ . Potom ukažte, že toto zobrazení má jediný samodružný bod - střed otočení.*

*Řešení:* Postupujeme podle obrázku 24.



Obrázek 24: Otočení  $\mathcal{R}([0, 0], \alpha)$

Rovnice otočení o úhel  $\alpha$  kolem počátku jsou

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \alpha - y \sin \alpha \\y' &= x \sin \alpha + y \cos \alpha\end{aligned}$$

**Věta 13.** Složením dvou osových souměrností s různoběžnými osami vznikne otočení, jehož středem je průsečík těchto os.

**Věta 14.** Každé otočení lze složit ze dvou osových souměrností, jejichž osy jsou různoběžky procházející středem otočení. Jednu z těchto os lze volit libovolně tak, že prochází středem otočení. Druhá je touto volbou určena jednoznačně.

**Věta 15.** Otočení se středem  $S$  a úhlem velikosti  $\alpha$  převádí přímku  $p$  v přímku  $p'$  různoběžnou s  $p$ ; přitom dva vrcholové úhly, které  $p$  a  $p'$  tvoří, mají velikost  $\alpha$ .

### Analytické vyjádření otočení (rotace) $\mathbf{R}(S, \alpha)$ v rovině

Souřadnice středu:  $S = [s_1, s_2]$

$$\begin{aligned}x' &= (x - s_1) \cos \alpha - (y - s_2) \sin \alpha + s_1 \\y' &= (x - s_1) \sin \alpha + (y - s_2) \cos \alpha + s_2\end{aligned}$$

Po úpravě dostaneme:

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \alpha - y \sin \alpha + s_1 - s_1 \cos \alpha + s_2 \sin \alpha \\y' &= x \sin \alpha + y \cos \alpha + s_2 - s_1 \sin \alpha - s_2 \cos \alpha\end{aligned}$$

**PŘÍKLAD 5.7.** Afinní zobrazení euklidovské roviny na sebe zobrazuje vrchol  $A$  trojúhelníku  $ABC$  na bod  $B$ , bod  $B$  na bod  $C$  a bod  $C$  na bod  $A$ . Může to být zobrazení shodné? Jestliže ano, napište jeho rovnice vzhledem k vhodně zvolené kartézské soustavě souřadnic.

### 5.3.1 Otočení - Úlohy

**21.** Jsou dány dvě shodné úsečky  $AB$ ,  $CD$ . Určete otočení, které zobrazí  $A$  na  $C$  a  $B$  na  $D$ .

**22.** Je dána kružnice  $k(S; r)$  a bod  $P \neq S$ . Bodem  $P$  vedte přímku, na které kružnice vytíná úsečku dané velikosti  $d$ .

**23.** Jsou dány různé rovnoběžné přímky  $a, b, c$  a bod  $A$ , který leží na přímce  $a$ . Sestrojte všechny rovnostranné trojúhelníky  $ABC$ , jejichž vrcholy  $B, C$  leží po řadě na přímkách  $b, c$ .

**24.** Je dána kružnice  $k(S; 3cm)$  a bod  $A$  ( $|SA| = 1.5cm$ ). Sestrojte všechny tětivy  $XY$  kružnice  $k$  o délce  $5.5cm$ , které procházejí bodem  $A$ .

**25.** Je dána kružnice  $k(S; r)$ , bod  $B$  a úsečka délky  $d$  ( $d < 2r$ ). Sestrojte tětivu  $XY$  kružnice  $k$  délky  $d$  tak, aby byla vidět z bodu  $B$  pod úhlem  $60^\circ$ .

### 5.3.2 Otočení - Úlohy na domácí přípravu

**26.** Jsou dány dvě rovnoběžné přímky  $a, b$  a mimo ně bod  $C$ . Sestrojte rovnostranný trojúhelník  $ABC$  tak, aby jeho vrcholy  $A, B$  ležely po řadě na přímkách  $a, b$ .

**27.** Jsou dány kružnice  $k$ , přímka  $p$  a bod  $A$  ležící vně  $k$ . Sestrojte rovnostranný trojúhelník s vrcholem v bodě  $A$  tak, aby zbývající vrcholy ležely na  $k$  a na  $p$ .

**28.** Při odvalování kružnice po přímce se body soustavy spojené s kružnicí pohybují po trajektoriích, kterým se říká **cykloidy**. Rozlišujeme tři typy cykloid, v závislosti na tom, zda bod leží vně, na nebo uvnitř kružnice. Zobrazte tyto křivky pomocí programu GeoGebra.