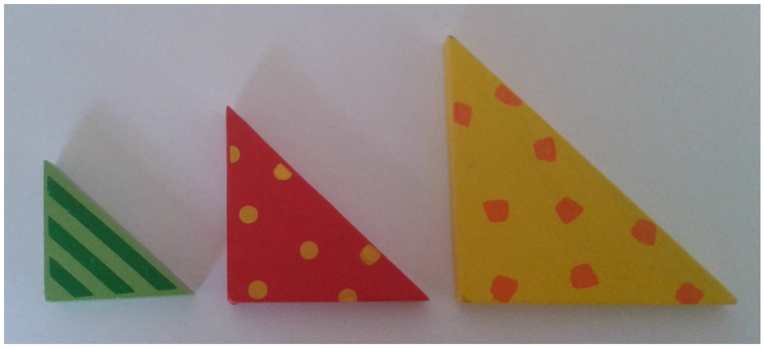
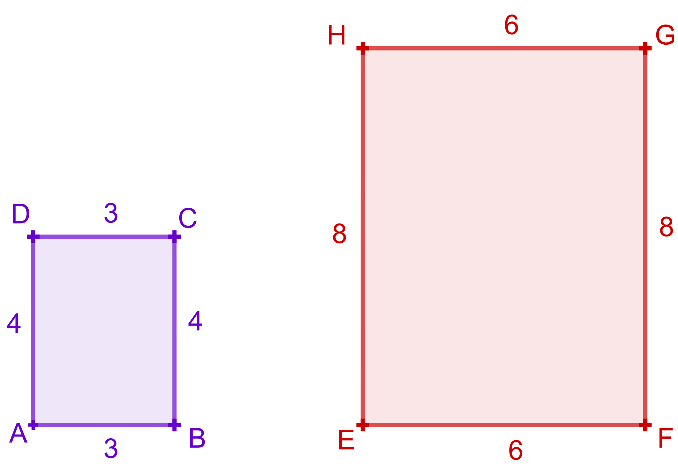
8 Podobná zobrazení

V úvodu kapitoly 5 na str. 23 je řečeno, že zatímco shodnost zachovává rozměry i tvar útvaru, podobnost, přesněji *vlastní podobnost*, jak si za chvíli upřesníme, zachovává jenom tvar, rozměry se mění. Jak ale matematicky postihnout „zachování tvaru“? Místo zachování tvaru můžeme hovořit také o zachování proporcí, tj. poměrů



Obrázek 80: Podobné útvary

rozměrů útvaru. Například oba obdélníky $ABCD$ a $EFGH$ na Obr. 81 mají shodný



Obrázek 81: U podobných útvarů se shodují poměry sobě odpovídajících rozměrů

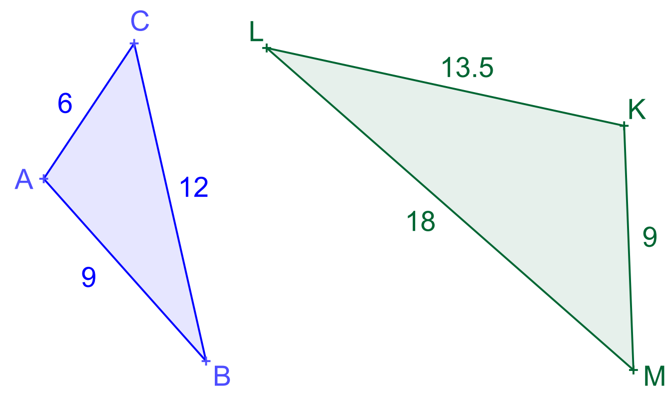
poměr výšky a šířky,

$$\frac{b}{a} = \frac{4}{3}, \quad \frac{f}{e} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$$

Jsou tedy podobné. Řekli bychom, že „vypadají stejně“, akorát jsou „různě velké“, $EFGH$ je větší než $ABCD$. Tento jejich vzájemný vztah vyjádříme *koeficientem (poměrem) podobnosti*, číslem, které udává, kolikrát jsou změněny rozměry jednoho z nich vůči odpovídajícím rozměrům toho druhého. Poměr podobnosti obdélníku $EFGH$ vzhledem k $ABCD$ je roven

$$\frac{e}{a} = \frac{f}{b} = 2,$$

každý jeho rozměr je tedy dvakrát větší než odpovídající rozměr $ABCD$. Trojúhel-



Obrázek 82: U podobných útvarů se shodují poměry sobě odpovídajících rozměrů

níky ΔABC a ΔKLM na Obr. 82 jsou také podobné. Snadno ověříme, že poměry odpovídajících si dvojic stran (stranám a, b, c odpovídají v daném pořadí strany k, l, m) jsou i v jejich případě shodné

$$\frac{a}{b} = \frac{k}{l} = 2, \quad \frac{a}{c} = \frac{k}{m} = \frac{4}{3}, \quad \frac{b}{c} = \frac{l}{m} = \frac{2}{3}.$$

Poměr jejich podobnosti, pokud uvažujeme, že ΔKLM „vznikl“ z ΔABC, je

$$\frac{k}{a} = \frac{l}{b} = \frac{m}{c} = \frac{3}{2}.$$

Na str. 23 jsme v souvislosti se shodností uvedli, že invariantem shodného zobrazení je vzdálenost, zde tedy můžeme prohlásit, že *invariantem podobného zobrazení je poměr vzdáleností.*

PŘÍKLAD 8.1. *Určete poměry obsahů dvojic podobných útvarů na Obr. 81 a 82.*

Koeficient podobnosti je klíčovým pojmem následující definice podobného zobrazení. Pozorný čtenář si jistě všimne, že je to také jediný pojem, kterým se tato definice odlišuje od definice shodného zobrazení 15 na str. 23.

Definice 24 (Podobné zobrazení). *Geometrické zobrazení f se nazývá „podobné zobrazení“, jestliže existuje kladné reálné číslo k tak, že pro každé dva body X, Y uvažovaného prostoru (v našem případě se bude jednat převážně o rovinu) a jejich obrazy X', Y' platí:*

$$|X'Y'| = k|XY|. \tag{73}$$

Číslo k se nazývá koeficient podobného zobrazení f.

Poznámka. Podobná zobrazení, u nichž vzory i obrazy patří do téhož prostoru, např. roviny, nazýváme *podobné transformace roviny* zkráceně *podobnosti.* Potom hovoříme např. o *podobnostech v rovině*[18] nebo o *podobnostech v trojrozměrném prostoru.*

Vlastní podobnosti

Jak už bylo řečeno, definice podobného zobrazení 24 se od definice shodného zobrazení 15 liší pouze přítomností *koeficientu podobnosti* k. Protože hodnota $k = 1$ není definicí 24 vyloučena, je zřejmé, že pro toto k se podobnost stává shodností. Proto podobnosti s koeficientem $k \neq 1$ nazýváme *vlastní podobnosti.*

Samodružné body vlastní podobnosti Přestože pojem *vlastní podobnost* představuje poměrně obecné vymezení zobrazení v rovině, můžeme již na této úrovni odhalit zajímavou skutečnost o samodružných bodech. Platí totiž následující věta.

Věta 8. *Každá vlastní podobnost má právě jeden samodružný bod.*

Důkaz. Důkaz této věty se provádí ve dvou krocích. Nejprve dokážeme, že vlastní podobnost (tj. podobnost s koeficientem $k \in R^+ - \{1\}$) nemůže mít více než jeden samodružný bod, potom dokážeme, že musí mít aspoň jeden. Dohromady nám tedy vyjde, že vlastní podobnost musí mít právě jeden samodružný bod. Myšlenka důkazu prvního dílčího tvrzení je naznačena v komentáři řešení následujícího příkladu 8.2. Důkazem druhého tvrzení se zde zabývat nebudeme (To však neznamená, že se o to čtenář nemůže pokusit sám). □

PŘÍKLAD 8.2. *Pokuste se najít argumenty pro výše uvedené tvrzení, že vlastní podobnost nemůže mít více než jeden samodružný bod*

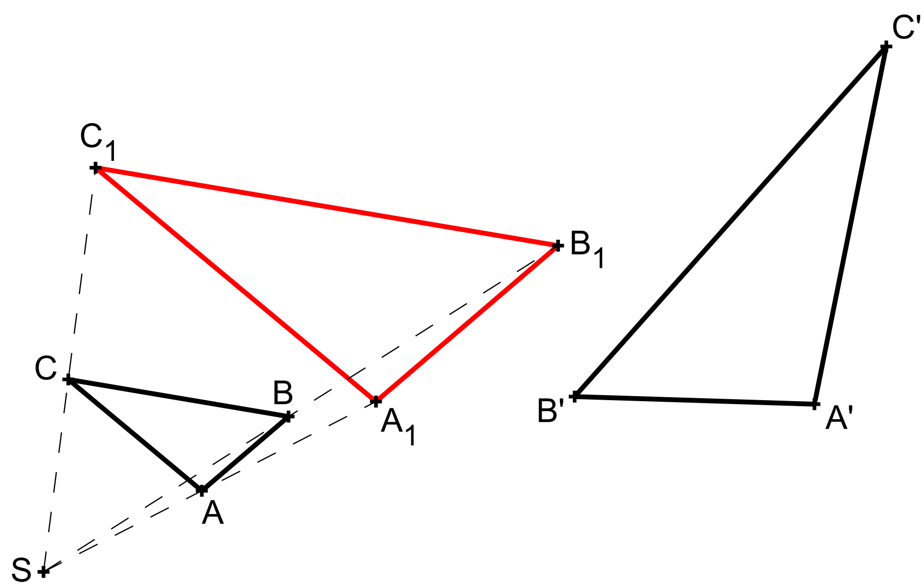
Řešení: Pravdivost tvrzení snadno dokážeme sporem. Předpokládejme, že platí negace tohoto tvrzení, tj. *vlastní podobnost má více než jeden samodružný bod.* Uvažujme dva takovéto body, X a Y. Každý z nich se zobrazuje sám na sebe, tj. $X' \equiv X$, $Y' \equiv Y$. Potom ale musí platit $|X'Y'| = |XY|$, což je ve sporu s definicí 24, ze které vyplývá, že pro vlastní podobnost platí $|X'Y'| = k|XY|$, kde $k \neq 1$, tj. $|X'Y'| \neq |XY|$. Negace dokazovaného tvrzení, která je takto ve sporu s definicí, nemůže platit. Platí tedy ono tvrzení. Tím je důkaz proveden.

[18] Můžeme také rovnou definovat tyto *podobné transformace roviny*, tj. *podobnosti v rovině*, takto:
Definice (**Podobnost**) Zobrazení f roviny (eukleidovského prostoru E_2) na sebe se nazývá „podobnou transformací roviny“ (též „podobností v rovině“), jestliže existuje kladné reálné číslo k tak, že pro každé dva body X, Y roviny a jejich obrazy X', Y' platí $|X'Y'| = k|XY|$. Číslo k se nazývá koeficient podobnosti f.

Podobnosti v rovině jako složená zobrazení

Na Obr. 83 vidíme dva podobné trojúhelníky $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$. Představme si, že chceme, geometrickými prostředky, z ΔABC „vytvořit“ (tj. zobrazit „na“) $\Delta A'B'C'$. Možný postup je naznačen na Obr. 83. Nejprve zvětšíme ΔABC na velikost $\Delta A'B'C'$. K tomu použijeme stejnolehlost[19] s libovolně zvoleným středem S a koeficientem κ, jehož absolutní hodnota je rovna koeficientu podobnosti k předmětných trojúhelníků, tj. např. $k = \dfrac{|A'B'|}{|AB|}$. Výsledkem zobrazení ΔABC v této stejnolehlosti je červený trojúhelník $\Delta A_1B_1C_1$, shodný s $\Delta A'B'C'$, tj. $\Delta A_1B_1C_1 \cong \Delta A'B'C'$. Z věty 3 o určenosti shodného zobrazení v rovině, viz str. 24, víme, že dvojicí shodných trojúhelníků je shodnost určena jednoznačně. Existuje tedy jediná shodnost, v níž se $\Delta A_1B_1C_1$ zobrazuje na $\Delta A'B'C'$. Můžeme proto vyslovit následující větu.

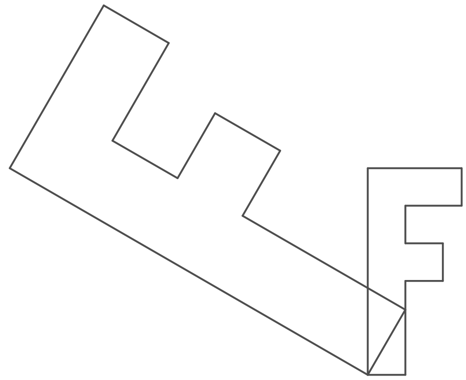
Věta 9. *Každou podobnost v rovině s poměrem podobnosti k lze rozložit na stejnolehlost $H(S, k)$ a shodnost Z. Přitom střed stejnolehlosti můžeme volit libovolně a shodnost Z je tím určena jednoznačně.*



Obrázek 83: Každou podobnost lze rozložit na stejnolehlost a shodnost

PŘÍKLAD 8.3. *Pokuste se popsat stejnolehlost a shodnost, jejichž složením vznikne podobnost zachycená na Obr. 84.*

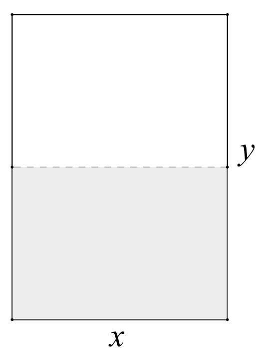
[19] O stejnolehlosti pojednává kapitola 9 začínající na str. 108, kde je uvedena též její definice 25



Obrázek 84: Podobné útvary v rovině

PŘÍKLAD 8.4. *Víte v jakém vztahu jsou papíry různých velikostí formátu A? Jsou vzájemně podobné?*

Řešení: Pro archy formátu A je typickou vlastností to, že každý z nich je polovinou toho většího. Přehneme-li například papír formátu $A3$ na polovinu podél osy rovnoběžné s kratší stranou, dostaneme formát $A4$, viz Obr. 85, přeložíme-li $A4$, dostaneme $A5$ atd. Všechny archy formátů A jsou tedy podobné. Označíme-li x, y

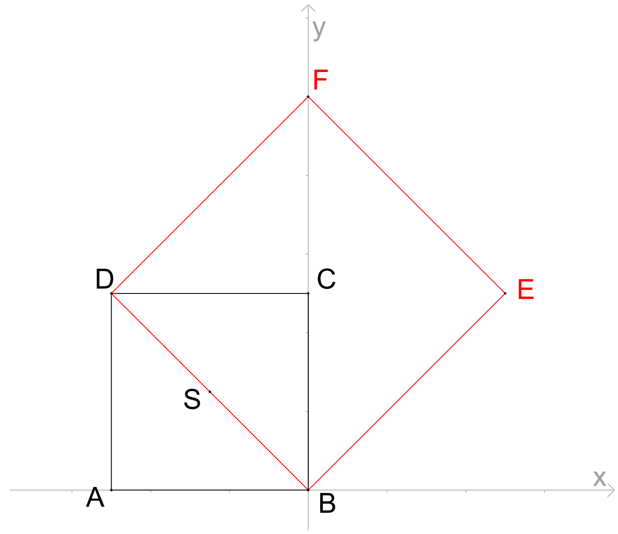


Obrázek 85: Papír formátu „A“

strany obdélníku formátu A, viz Obr. 85, musí dle výše uvedeného platit $\dfrac{y}{x} = \dfrac{x}{\frac{y}{2}}$, odkud po jednoduché úpravě dostáváme $y^2 = 2x^2$, tj. $y = \sqrt{2}x$. Poměr délky delší strany ku délce kratší strany archu A je $\sqrt{2} : 1$.

PŘÍKLAD 8.5. *V eukleidovské rovině je dán čtverec $ABCD$ se středem S. Existuje právě jedno podobné zobrazení roviny čtverce do sebe, při kterém se body A, B, S zobrazí po řadě na body D, B, C. Rozložte toto podobné zobrazení na stejnolehlost a shodné zobrazení.*

Řešení: Řešení si usnadníme vhodným umístěním daného čtverce do kartézské soustavy souřadnic Oxy, vrcholem B do počátku, vrcholem A na zápornou poloosu x,

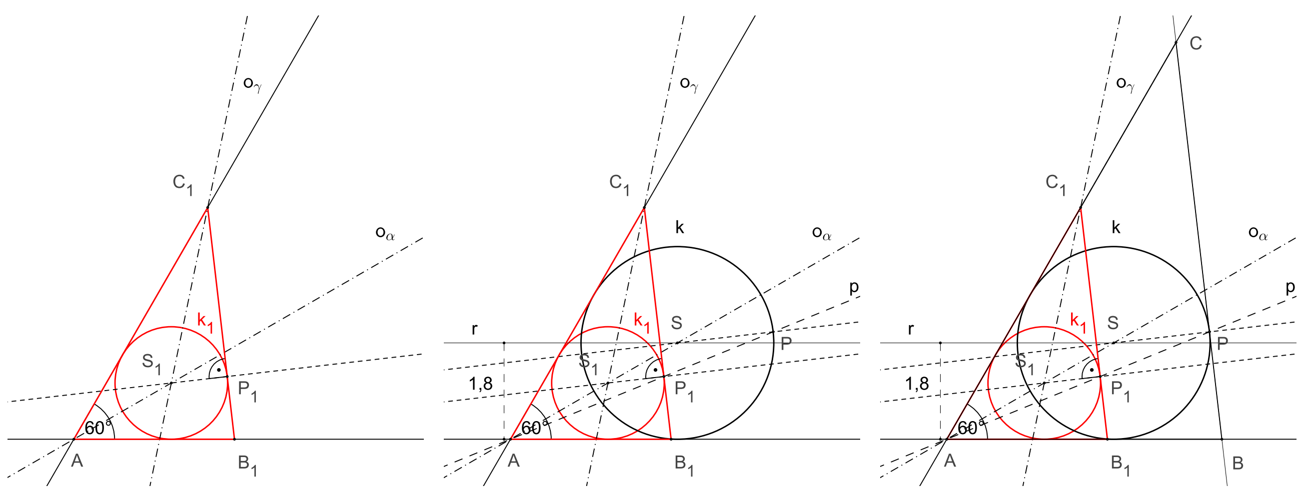


Obrázek 86: Zobrazte $ABCD$ na $DEFG$

viz Obr. 86. Potom je evidentní, že příslušné podobné zobrazení můžeme rozložit na stejnolehlost $\mathcal{H}(B, \kappa = \sqrt{2})$ (nejprve čtverec $ABCD$ zvětšíme $\sqrt{2}$-krát) a otočení $\mathcal{R}(B, -45°)$ (zvětšený čtverec otočíme kolem B o 45° po směru pohybu hodinových ručiček).

PŘÍKLAD 8.6. *Sestrojte alespoň jeden trojúhelník ABC, pro který platí $|AB| : |AC| = 3 : 5$, $\alpha = 60°$, $\rho = 1,8\,cm$ (poloměr kružnice vepsané).*

Řešení: Konstrukce krok za krokem je online zde https://www.geogebra.org/m/p43wpafh. Na Obr. 87 jsou vybrány její tři klíčové kroky. Nejprve sestrojíme pomocný trojúhel-



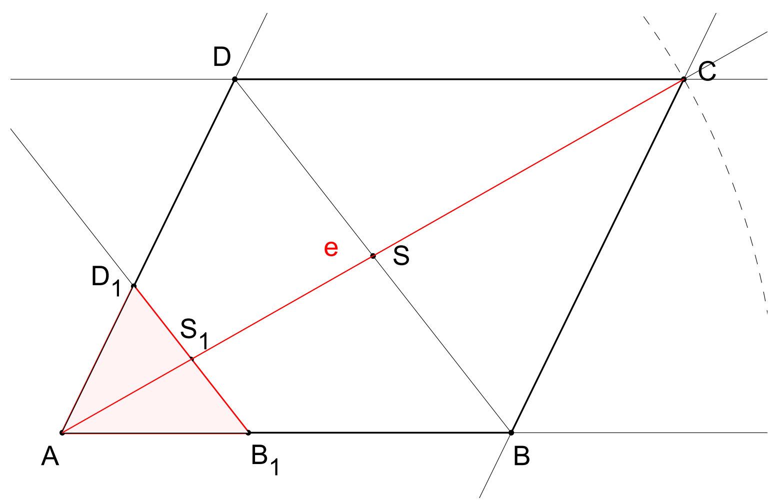
Obrázek 87: Konstrukce ΔABC

ník ΔAB_1C_1, jehož rozměry jsou $|AB_1| = 3\,\mathrm{cm}$, $|AC_1| = 5\,\mathrm{cm}$, $\alpha = 60°$ (víme tedy, že je podobný s hledaným trojúhelníkem, tj. má stejný tvar, ale jinou velikost), a vepíšeme mu kružnici k_1, jejímž bodem dotyku se stranou B_1C_1 je P_1, viz první obrázek zleva. Nyní sestrojíme kružnici k, která bude vepsána hledanému trojúhelníku.

Protože se kružnice k musí dotýkat přímek AB_1, AC_1, je zřejmé, že je stejnolehlá s k_1 ve stejnolehlosti se středem v A. Střed S kružnice k, který je obrazem S_1 v této stejnolehlosti, potom najdeme jako průsečík přímky AS_1 (tj. přímky procházející středem stejnolehlosti A a vzorem S_1) s přímkou r rovnoběžnou s AB_1 a vzdálenou od ní $\rho = 1,8\,\mathrm{cm}$. Analogicky najdeme bod P. Jako průsečík uvedené rovnoběžky r s přímkou AP_1. Máme-li střed S kružnice vepsané a jeden její bod P (který je bodem jejího dotyku se stranou BC hledaného trojúhelníku), máme tím kružnici k jednoznačně určenou, viz prostřední obrázek. Nyní zbývá doplnit stranu BC trojúhelníku ΔABC, což je snadné, protože víme, že P je jejím bodem dotyku s k a že bude rovnoběžná s B_1C_1, viz obrázek vpravo.

PŘÍKLAD 8.7. *Sestrojte kosodélník $ABCD$, je-li dáno $|\angle DAB| = \alpha$, $|\angle ABD| = \varepsilon$, $|AC| = e$.*

Řešení: Opět použijeme pomocný útvar, který umíme sestrojit a je podobný hledanému útvaru nebo jeho části. Konkrétně se jedná o trojúhelník ΔAB_1D_1, viz Obr. 88, který je stejnolehlý s trojúhelníkem ΔABD ve stejnolehlosti se středem A. Řešení krok za krokem je uvedeno v online appletu https://www.geogebra.org/m/g74dbhwp. Klíčovou roli pro vyřešení úlohy hraje skutečnost, která souvisí s tím, že podobná



Obrázek 88: Sestrojte kosodélník $ABCD$

zobrazení patří mezi *afinní zobrazení*, viz definice 13 na str. 17. Konkrétně se jedná o to, že střed S_1 úsečky B_1D_1 se zobrazí na střed S úsečky BD.

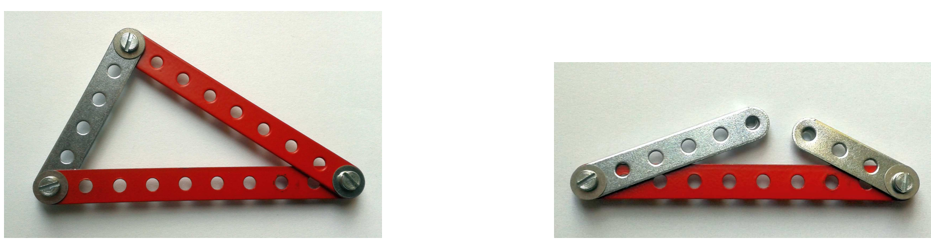
V planimetrii se věnujeme geometrii v rovině, v eukleidovském prostoru dimenze 2, to ale neznamená, že shodná nebo podobná zobrazení a jejich definice, které jsme si uvedli, jsou omezena jenom na tento prostor. Jak ukazuje následující příklad, je zcela přirozené, zabývat se podobností i v prostoru dimenze 3.

PŘÍKLAD 8.8. *Jsou krabice na Obr. 89 geometricky podobné?*

Obrázek 89: Jsou z pohledu geometrie vzájemně podobné tyto krabice mléka?

8.1 Věty o podobnosti trojúhelníků

Trojúhelník je jednoznačně určen délkami svých stran. Pokud tři úsečky splňují trojúhelníkovou nerovnost, viz Obr. 90, též str. 75, existuje jediný trojúhelník, který je má jako strany. Délkami stran je tak jednoznačně dán tvar trojúhelníku, tj. i veli-

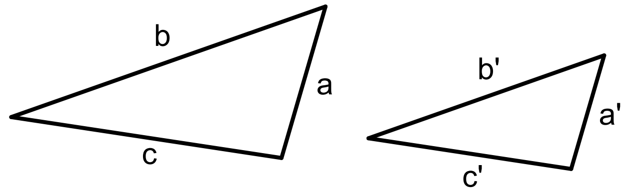


Obrázek 90: Součet dvou stran trojúhelníku musí být větší než strana třetí (vlevo), pokud tomu tak není, nelze trojúhelník sestrojit (vpravo).

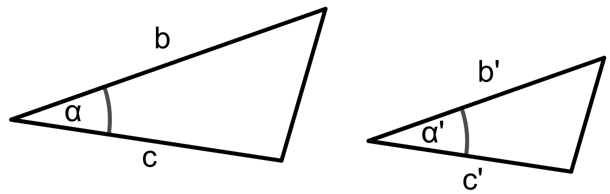
kosti jeho vnitřních úhlů. Trojúhelník jemu podobný má stejný tvar, tj. i velikosti vnitřních úhlů, liší se svou velikostí. Každá jeho strana je k-násobkem (k je koeficient podobnosti) velikosti odpovídající strany původního trojúhelníku.

Dva trojúhelníky jsou podobné, jestliže se shodují poměry délek dvojic jejich odpovídajících si stran. Zároveň se shodují velikosti jejich vnitřních úhlů.

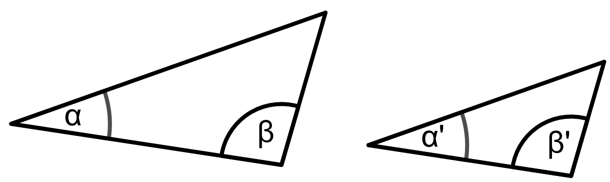
Pro usnadnění identifikace dvojice podobných trojúhelníků byla vytvořena dílčí kritéria, ekvivalentní s výše uvedeným tvrzením, která jsou známa jako *věty o podobnosti trojúhelníků*: *sss*, *sus*, *uu*, *Ssu*, viz Obr. 91–94



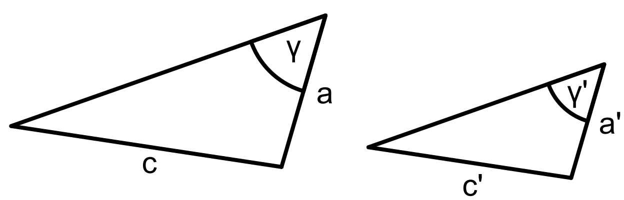
Obrázek 91: *sss*: $a'/a = b'/b = c'/c$



Obrázek 92: *sus*: $b'/b = c'/c$, $\alpha = \alpha'$



Obrázek 93: *uu*: $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$



Obrázek 94: *Ssu*: $c > a$, $a'/a = c'/c$, $\gamma = \gamma'$

Analogicky s větou 3 *o určenosti shodného zobrazení v rovině*, viz str. 24, můžeme vyslovit následující větu o *o určenosti podobného zobrazení v rovině*, kterou můžeme ve stručnosti interpretovat tak, že podobnost v rovině je jednoznačně dána (ustavena) dvojicí podobných trojúhelníků.

Věta 10 (O určenosti podobnosti v rovině). *Každá podobnost v rovině je jednoznačně určena trojúhelníkem ABC a jeho obrazem $A'B'C'$ takovým, že $|A'B'| = k|AB|, |B'C'| = k|BC|, |A'C'| = k|AC|$, kde k, $k > 0$, je koeficient této podobnosti.*