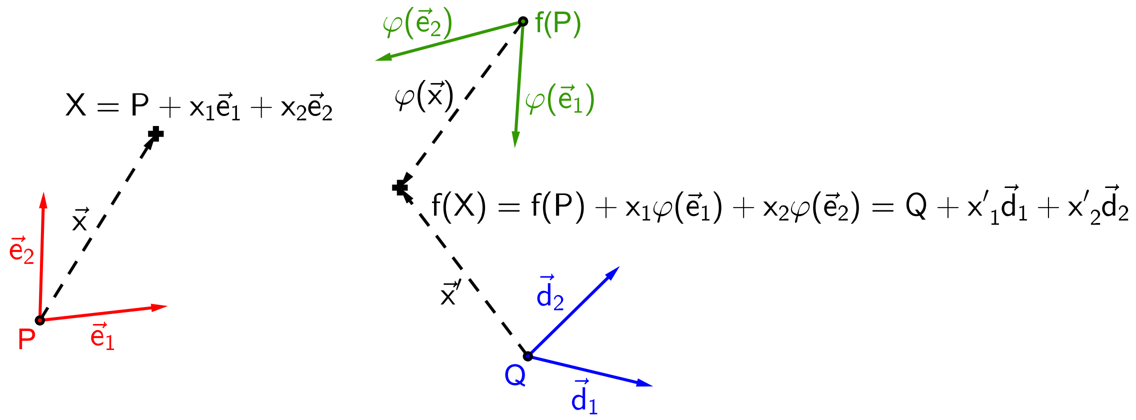
10 Analytické vyjádření afinního zobrazení v rovině

Odvodíme si analytické vyjádření afinního zobrazení f roviny na sebe (zkráceně „afinity“ v rovině). Základní myšlenka tohoto odvození je ilustrována Obr. 22. V rovině A_2 máme dvě afinní soustavy souřadnic (repéry), „soustavu vzorů“ $\alpha = \{P; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ (je určena počátkem P a bází $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ vektorového zaměření prostoru A_2) a „soustavu obrazů“ $\omega = \{Q; \vec{d}_1, \vec{d}_2\}$ (určena počátkem Q a bází $\{\vec{d}_1, \vec{d}_2\}$ vektorového zaměření prostoru A_2). Přitom repér $\{P; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ se působením uvažované afinity f zobrazí na repér $\{f(P); \varphi(\vec{e}_1), \varphi(\vec{e}_2)\}$, kde φ homomorfismus (lineární zobrazení) asociovaný k f. Obrazem bodu $X = [x_1, x_2]$ je bod $f(X) = X' = [x'_1, x'_2]$. Vztah mezi souřadnicemi $f(X)$ a X najdeme tak, že bod $f(X)$ vyjádříme vzhledem k oběma repérům $\{Q; \vec{d}_1, \vec{d}_2\}$ a $\{f(P); \varphi(\vec{e}_1), \varphi(\vec{e}_2)\}$ (viz Obr. 22) a tato vyjádření porovnáme.



Obrázek 22: Zobrazení bodu X v afinitě f v rovině

Nechť f je afinní zobrazení prostoru A_2 na sebe a φ je homomorfismus asociovaný k f. Potom obrazy $\varphi(\vec{e}_1), \varphi(\vec{e}_2)$ vektorů báze $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ můžeme vyjádřit rovnicemi

$$\varphi(\vec{e}_1) = a_{11}\vec{d}_1 + a_{21}\vec{d}_2, \tag{23}$$

$$\varphi(\vec{e}_2) = a_{12}\vec{d}_1 + a_{22}\vec{d}_2, \tag{24}$$

kde koeficienty a_{ij} jsou souřadnice vektorů $\varphi(\vec{e}_1)$, $\varphi(\vec{e}_2)$ vzhledem k bázi $\{\vec{d}_1, \vec{d}_2\}$ a pro obraz $f(P)$ počátku P repéru α můžeme psát

$$f(P) = Q + b_1\vec{d}_1 + b_2\vec{d}_2, \tag{25}$$

kde $[b_1, b_2]$ jsou jeho souřadnice vzhledem k repéru ω.

Nyní určíme vztah mezi souřadnicemi libovolného bodu $X \in A_2$ a jeho obrazu $X' = f(X) \in A_2$. Nejprve každý z těchto bodů zapíšeme v příslušném repéru, bod X v repéru α, bod $f(X)$ pak v repéru ω,

$$X = P + x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2, \tag{26}$$

$$f(X) = Q + x_1'\vec{d_1} + x_2'\vec{d_2}. \tag{27}$$

Potom, s využitím vlastností zobrazení f a φ, zapíšeme obraz bodu X ve tvaru

$$f(X) = f(P + x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2}) = f(P) + \varphi(x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2}) = f(P) + x_1\varphi(\vec{e_1}) + x_2\varphi(\vec{e_2}).$$

Po dosazení z (23), (24) a (25) dostáváme

$$f(X) = Q + b_1\vec{d_1} + b_2\vec{d_2} + x_1(a_{11}\vec{d_1} + a_{21}\vec{d_2}) + x_2(a_{12}\vec{d_1} + a_{22}\vec{d_2}).$$

Po úpravě a porovnání koeficientů při $\vec{d_i}$ s vyjádřením (27) dostáváme hledané rovnice afinity f v rovině

$$\begin{aligned} f:\ x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1,\\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2. \end{aligned} \tag{28}$$

Nyní ještě určíme rovnice asociovaného zobrazení φ. Nechť vektor $\vec{u} \in V_2$ se zobrazí do vektoru $\varphi(\vec{u}) \in V_2$. Pro souřadnice vzoru $\vec{u}$ a obrazu $\varphi(\vec{u})$ platí

$$\vec{u} = u_1\vec{e_1} + u_2\vec{e_2}, \tag{29}$$

$$\varphi(\vec{u}) = u_1'\vec{d_1} + u_2'\vec{d_2}. \tag{30}$$

Na (29) aplikujeme zobrazení φ a upravíme dle (23) a (24). Dostaneme

$$\varphi(\vec{u}) = u_1\varphi(\vec{e_1}) + u_2\varphi(\vec{e_2}) = u_1(a_{11}\vec{d_1} + a_{21}\vec{d_2}) + u_2(a_{12}\vec{d_1} + a_{22}\vec{d_2}).$$

Po úpravě a srovnání s (30) dostaneme hledané rovnice asociovaného zobrazení φ:

$$\begin{aligned} \varphi:\ u_1' &= a_{11}u_1 + a_{12}u_2,\\ u_2' &= a_{21}u_1 + a_{22}u_2. \end{aligned} \tag{31}$$

Soustavu rovnic afinity v rovině (28) můžeme zapsat také pomocí matic, takto

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

stručněji pak ve tvaru

$$\mathbf{X}' = A \cdot \mathbf{X} + B.$$