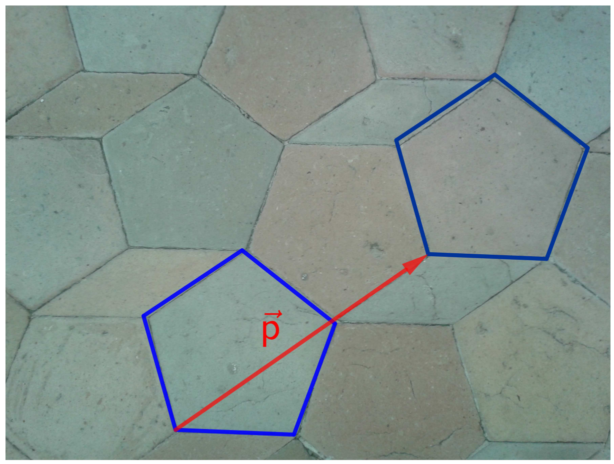
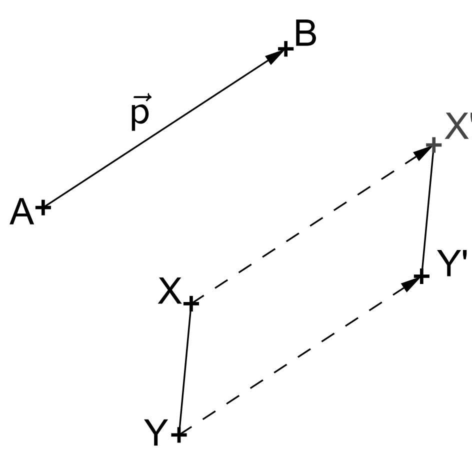
5.12 Posunutí (Translace)

Posunutí (též *translace*) je určeno směrem a velikostí (tj. kam a jak daleko rovinu posuneme). Oba tyto údaje se dají vyjádřit jedním vektorem, *vektorem posunutí*. Posunutí s vektorem posunutí $\vec{p}$ značíme $\mathcal{T}(\vec{p})$. Pokud je posunutí dáno orientovanou úsečkou $\overrightarrow{AB}$, s počátečním bodem A a koncovým bodem B, značíme ho $\mathcal{T}(\overrightarrow{AB})$. Posunutí je *přímou shodností*. Nemá *žádný samodružný bod* (všechny body se posunou), ale má *samodružné všechny směry* (přímka se posunutím zobrazí na přímku s ní rovnoběžnou). Posunutí není *involutorním zobrazením*, viz str. 49.



Obrázek 59: Posunutí $\mathcal{T}(\vec{p})$

Definice 22 (Posunutí). *Posunutí (též translace) je zobrazení, které každému bodu X roviny přiřazuje bod X' tak, že platí $\overrightarrow{XX'} = \vec{p}$, tj. $X' = X + \vec{p}$, kde $\vec{p}$, vektor posunutí, je vektor vyjadřující směr a velikost posunutí, který je určen orientovanou úsečkou $\overrightarrow{AB}$, tj. platí $\vec{p} = B - A$, viz Obr. 60. Zobrazení značíme $\mathcal{T}(\vec{p})$.*



Obrázek 60: Posunutí $\mathcal{T}(\vec{p})$

Samodružné body, směry a přímky posunutí

Posunutí (translace) nemá *žádný samodružný bod* a zobrazuje přímku do přímky s ní rovnoběžné, tj. má *všechny směry samodružné*. *Samodružnými přímkami*, tj. přímkami, které se posunutím zobrazí samy na sebe, jsou *přímky rovnoběžné se směrem posunutí*.

Analytické vyjádření posunutí $\mathbf{T}(\vec{p})$ v rovině

Pro $\mathcal{T} : X \longrightarrow X'$, kde $\vec{p} = (p_1, p_2)$ je nalezení rovnic, které popisují vztah mezi souřadnicemi vzoru $X[x, y]$ a jeho obrazu $X'[x', y']$ velmi jednoduché. Jak je uvedeno v definici 22 a jak je vidět z Obr. 61, pro vzor X a jeho obraz X' platí

$$X' = X + \vec{p}. \tag{58}$$

Po dosazení souřadnic bodů X, X' a vektoru $\vec{p}$ dostaneme rovnost

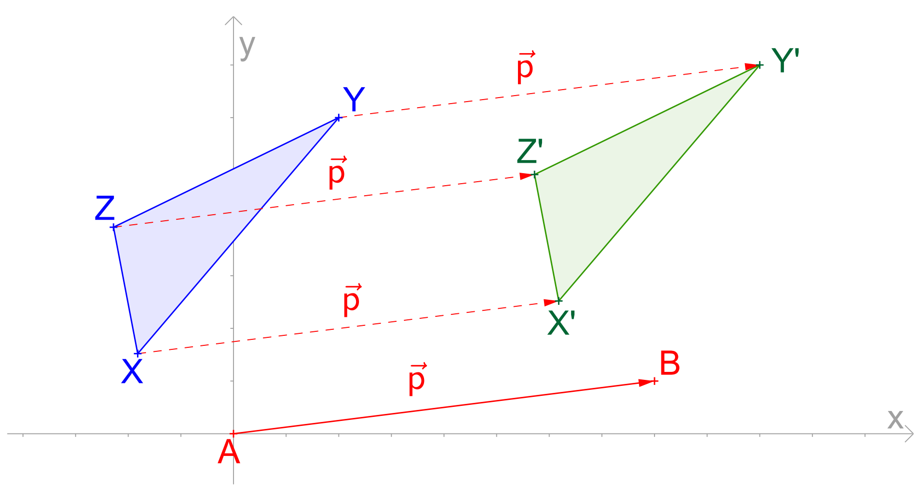
$$[x', y'] = [x, y] + (p_1, p_2), \tag{59}$$

kterou když upravíme

$$[x', y'] = [x + p_1, y + p_2]$$

a rozepíšeme po složkách, dostaneme *analytické vyjádření posunutí* $\mathcal{T}(\vec{p})$ daného vektorem $\vec{p} = (p_1, p_2)$

$$\begin{aligned} x' &= x + p_1, \\ y' &= y + p_2. \end{aligned} \tag{60}$$



Obrázek 61: Posunutí $\mathcal{T}(\vec{p}) : X' = X + \vec{p}$, $Y' = Y + \vec{p}$, $Z' = Z + \vec{p}$

PŘÍKLAD 5.26. *Napište rovnice posunutí $\mathcal{T}(\vec{u})$, je-li $\vec{u} = (-3, 7)$.*

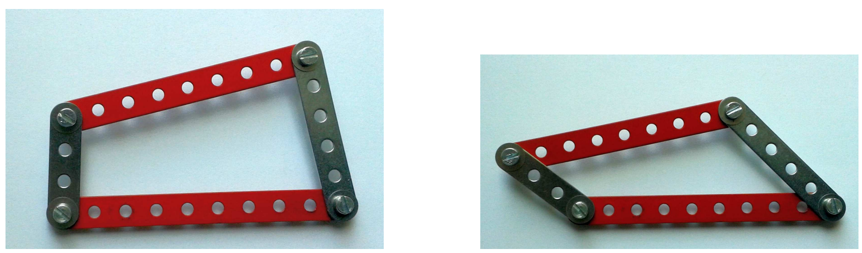
Řešení: Jednoduše dosadíme do rovnic (60):

$$x' = x - 3,$$
$$y' = y + 7.$$

PŘÍKLAD 5.27. *V posunutí $\mathcal{T}$ je obrazem bodu $K[2, -4]$ bod $K'[-9, 3]$. Napište rovnice posunutí $\mathcal{T}$.*

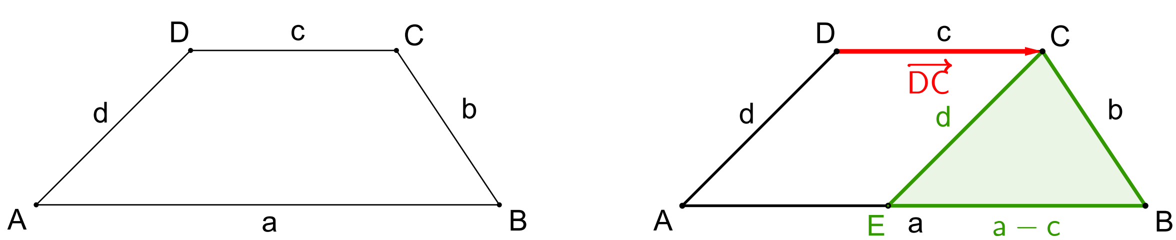
PŘÍKLAD 5.28. *Sestrojte lichoběžník, jsou-li dány velikosti jeho stran a, b, c, d.*

Řešení: Obecný čtyřúhelník není dán svými stranami jednoznačně, viz Obr. 62. V případě lichoběžníku, do jehož zadání automaticky patří požadavek na rovno-



Obrázek 62: Čtyřúhelník není dán délkami svých stran jednoznačně

běžnost protilehlých *základen* (zbývající dvě strany nazýváme *ramena*), je tomu ale jinak. Lichoběžník je svými stranami určen jednoznačně, viz Obr. 63, vlevo. Tato informace sama o sobě nás ale k řešení nedovede. Máme-li tři délky, trojúhelník z nich sestrojíme snadno, pokud splňují trojúhelníkovou nerovnost[16]. V případě čtyř délek člověk nemusí hned vědět, jak začít. Ukážeme si proto, že k danému cíli nás dovede úvaha založená na posunutí, kterou můžeme uplatnit právě díky rovnoběž-



Obrázek 63: Sestrojte lichoběžník $ABCD$, jsou-li dány jeho strany a, b, c, d

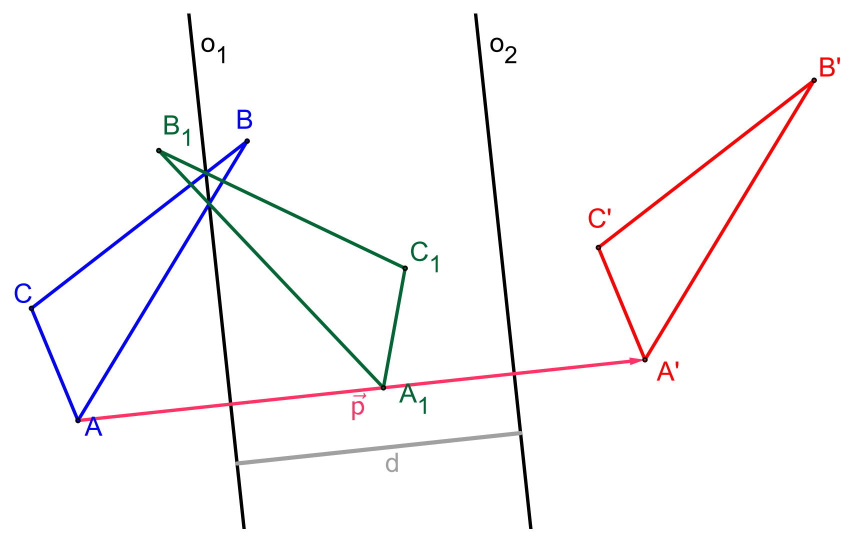
nosti základen lichoběžníku. Viz Obr. 63, vpravo. Posuneme-li stranu AD délky d

[16]Součet dvou stran libovolného trojúhelníku je větší než strana zbývající.

v posunutí daném vektorem $\overrightarrow{DC}$, zobrazí se vrchol D do vrcholu C a vrchol A do bodu E. Vznikne tak trojúhelník ΔEBC, jehož všechny strany známe a umíme ho proto sestrojit. Platí totiž, že $|EB| = a - c$, $|BC| = b$ a $|CE| = d$. Postup konstrukce lichoběžníku $ABCD$ je proto zřejmý. Nejprve sestrojíme AB, potom trojúhelník ΔEBC, jeho vrcholem C vedeme rovnoběžku s AB a naneseme na ní délku c. Tím dostaneme poslední vrchol lichoběžníku D, který tak dokončíme spojením D a A a náležitým zvýrazněním jeho stran. Poznamenejme ještě, že stejného výsledku bychom samozřejmě dosáhli i posunutím strany BC ve směru vektoru $\overrightarrow{CD}$ a následným uplatněním postupu analogickému tomu, který je výše popsán.

5.12.1 Posunutí jako složené zobrazení

Připomeňme si větu 5 na str. 62, která říká, že *každá shodnost v rovině se dá složit z nejvýše tří osových souměrností.* Dosud jsme se zabývali tím, jak lze z osových souměrností složit středovou souměrnost a otočení. V obou případech jsme vystačili se dvěma osovými souměrnostmi, v případě středové souměrnosti byly jejich osy kolmé, v případě otočení se pak jednalo o osy různoběžné, svírající úhel poloviční oproti úhlu otočení. Nyní si ukážeme, že se dvěma osovými souměrnostmi vystačíme i v případě *posunutí.* Tentokrát však budou jejich osy *rovnoběžné.* Na Obr. 64 je

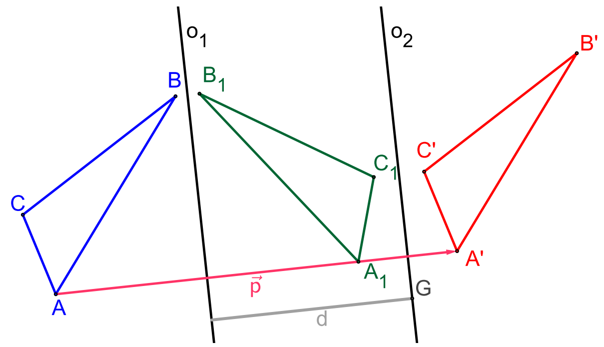


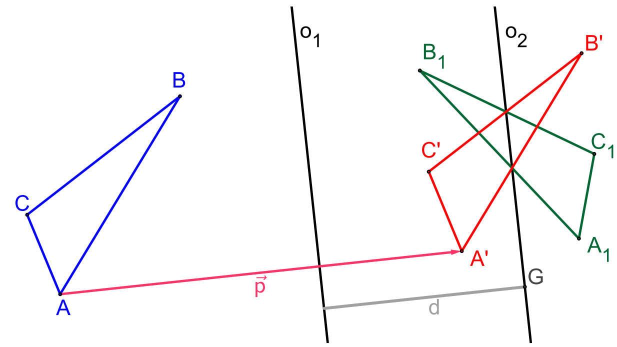
Obrázek 64: $\mathcal{O}(o_1)$: $\Delta ABC \to \Delta A_1B_1C_1$, $\mathcal{O}(o_2)$: $\Delta A_1B_1C_1 \to \Delta A'B'C'$, $\mathcal{T}(\vec{p})$: $\Delta ABC \to \Delta A'B'C'$

naznačeno, jak lze posunutí $\mathcal{T}(\vec{p})$, kde $\vec{p} = \overrightarrow{AA'}$, získat postupným uplatnění dvou osových souměrností $\mathcal{O}(o_1)$, $\mathcal{O}(o_2)$, jejichž osy jsou rovnoběžné, kolmé na směr posunutí a jejichž vzdálenost je poloviční oproti velikosti posunutí.

Posunutí (translaci) můžeme definovat též jako shodnost, která vznikne složením dvou osových souměrností s rovnoběžnými a různými osami. Směr posunutí je přitom *kolmý na směr těchto os a jeho velikost je rovna dvojnásobku jejich vzdálenosti.*

A naopak, každou translaci lze rozložit na dvě osové souměrnosti s rovnoběžnými osami, z nichž jednu lze volit libovolné, kolmo na směr translace a druhá je touto volbou určena jednoznačně. Na Obr. 65 (interaktivní varianta je dostupná na adrese https://www.geogebra.org/m/taa48mfx) vidíme posunutí $\mathcal{T}(\vec{p})$, ve kterém se



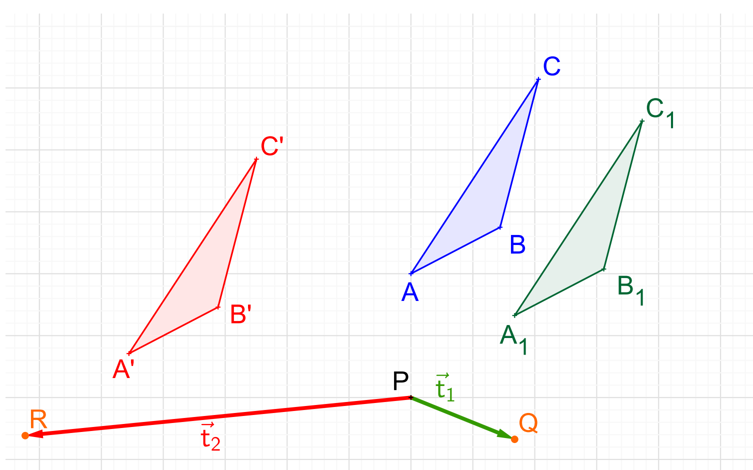


Obrázek 65: Rozklad posunutí $\mathcal{T}(\vec{p})$ je dán pouze polohou směrem a velikostí posunutí

ΔABC zobrazuje na $\Delta A'B'C'$, rozložené na dvě osové souměrnosti $\mathcal{O}(o_1)$, $\mathcal{O}(o_2)$ dvěma různými způsoby. Jediné, co je třeba při takovém rozkladu dodržet je to, aby osy byly rovnoběžné a kolmé na směr posunutí a jejich vzdálenost byla rovna polovině velikosti vektoru posunutí $\vec{p}$.

PŘÍKLAD 5.29. *Uvažujte dvě různá posunutí $\mathcal{T}_1$ a $\mathcal{T}_2$. Jaká všechna zobrazení $\mathcal{Z}$ mohou vzniknout jejich složením?*

Řešení: K vyšetřování skládání dvou různých posunutí můžete využít následující applet: https://www.geogebra.org/m/ajffjgam



Obrázek 66: $\mathcal{T}_1(\vec{t}_1) : \Delta ABC \to \Delta A_1B_1C_1$, $\mathcal{T}_2(\vec{t}_2) : \Delta A_1B_1C_1 \to \Delta A'B'C'$, $\mathcal{Z} : \Delta ABC \to \Delta A'B'C'$

5.13 Cvičení: Posunutí

Instrukce: Cvičení č. 1 řešte pro Vámi zvolené hodnoty. U zbývajících cvičení potom vždy proveďte rozbor příslušné úlohy, popište její konstrukci a nakonec úlohu vyřešte pro Vámi zvolené konkrétní zadání.

1. Sestrojte lichoběžník, jsou-li dány velikosti jeho stran a, b, c, d.

2. Jsou dány přímka p a dvě nesoustředné kružnice $k_1(S_1, r_1)$, $k_2(S_2, r_2)$. Veďte přímku rovnoběžnou s přímkou p tak, aby na ní kružnice k_1, k_2 vytínaly shodné tětivy.

3. Sestrojte lichoběžník $ABCD$, jsou-li dány délky obou jeho základen a, c a obou jeho úhlopříček e, f.

4. Jsou dány dvě různoběžky a, b a úsečka délky r. Sestrojte všechny kružnice k se středem na přímce a, poloměrem r, které na přímce b vytínají tětivu délky r.

Posunutí - Příklady pro dobrovolné řešení

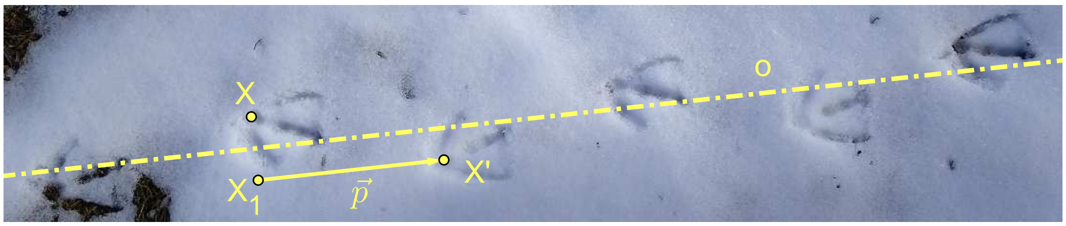
5. Sestrojte rovnoběžník, jsou-li dány délky jeho stran a velikost úhlu jeho úhlopříček.

6. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, jehož úhlopříčky svírají pravý úhel, jsou-li dány velikosti úhlopříček $|AC| = e$, $|BD| = f$ a velikosti úhlů $|\angle ABC| = 90°$, $|\angle ADC| = \delta$.

7. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, jsou-li dány velikosti jeho stran $|AB| = a, |BC| = b, |CD| = c, |DA| = d$ a odchylka ω přímek AD, BC.

5.14 Posunutá souměrnost (Posunuté zrcadlení)

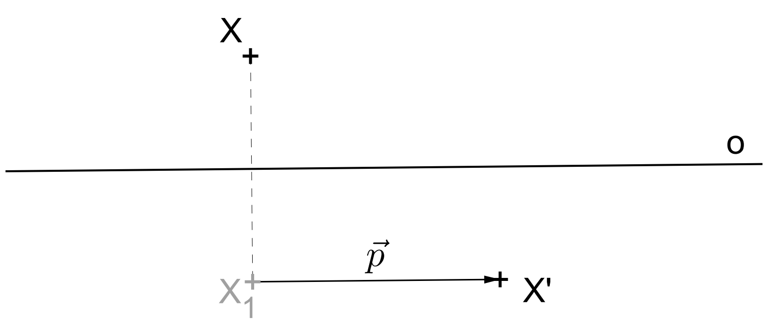
Posunutá souměrnost (též *posunuté zrcadlení*) je shodné zobrazení, které vznikne složením osové souměrnosti a posunutí (přitom nezávisí na jejich pořadí). Jeho věrnou analogií z reálného světa je vztah mezi otisky nohou při chůzi po přímce, viz Obr. 67. Levá stopa se nejprve zobrazí v osové souměrnosti podle osy o (na obrázku



Obrázek 67: Posunuté zrcadlení

viz $X \longrightarrow X_1$), potom se její obraz posune ve směru této osy v posunutí popsaném vektorem $\vec{p}$; $\vec{p} \parallel o$ (na obrázku viz $X_1 \longrightarrow X'$). Nejedná se tak o žádné „umělé“ zobrazení, ale naopak, o geometrický jev, se kterým se setkáváme doslova na každém kroku. Posunutá souměrnost *je určena osou souměrnosti a vektorem posunutí s ní rovnoběžným*. Posunutá souměrnost je *nepřímou shodností*, nemá *žádné samodružné body* a má dva *samodružné směry*, jeden rovnoběžný s osou souměrnosti (tj. směrem posunutí), druhý na něj kolmý. Pro označení posunuté souměrnosti není jeden zažitý symbol, v různých publikacích[17] se setkáme s označením Ps, $\mathcal{Z}$ nebo s. V tomto textu použijeme pro *posunutou souměrnost* označení Ps.

Definice 23 (Posunutá souměrnost). *Zobrazení složené z posunutí ve směru dané přímky o a osové souměrnosti podle osy o se nazývá posunutá souměrnost (též posunuté zrcadlení), viz Obr. 68.*



Obrázek 68: Posunuté zrcadlení $Ps: X \to X'$

[17] V daném pořadí se jedná o tyto publikace:
POLÁK, Josef. Přehled středoškolské matematiky. 10. vydání. Praha: Prometheus, 2015.
POMYKALOVÁ, Eva. Matematika pro gymnázia: planimetrie. 4., upr. vyd. Praha: Prometheus, 2000.
KUŘINA, František. Deset geometrických transformací. Praha: Prometheus, 2002.

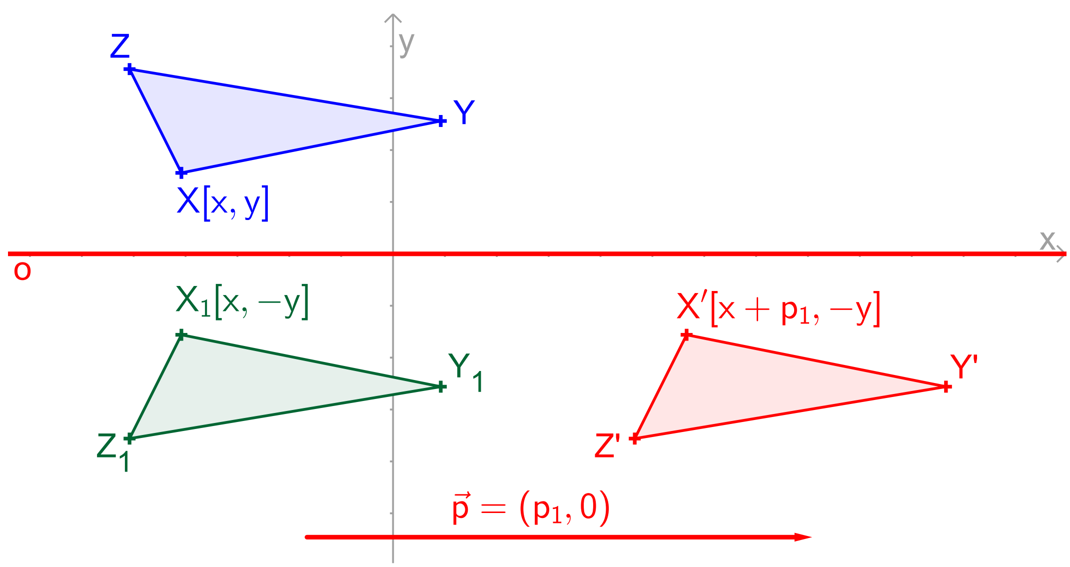
Samodružné body, směry a přímky posunuté souměrnosti

Posunutá souměrnost *nemá samodružné body. Samodružnou přímkou* tohoto zobrazení je osa o. *Samodružné směry* má dva, na sebe kolmé, směr kolmý na osu a směr rovnoběžný s osou.

Analytické vyjádření posunuté souměrnosti Ps

Posunutou souměrností se nebudeme zabývat nijak detailně, proto nám stačí, když si zde odvodíme její analytické vyjádření jenom pro speciální případ, kdy je osa souměrnosti o totožná se souřadnicovou osou x, a odvození rovnic pro obecnou polohu osy přenecháme čtenáři.

Vše potřebné je znázorněno na Obr. 69, kde je zachyceno zobrazení trojúhelníku ΔABC v posunuté souměrnosti Ps definované osu o; $o \equiv x$, a vektorem $\vec{p} = (p_1, 0)$. Pro odvození rovnic popisujících vztah mezi souřadnicemi vzoru $X[x, y]$ a obrazu $X'[x', y']$ v Ps se zaměříme speciálně na vrchol X trojúhelníku a jeho zobrazení v $\mathcal{O}(o)$ na X_1 a následné zobrazení X_1 na X', obraz bodu X v Ps. Postupným uplatněním vztahů pro zobrazení v osové souměrnosti a v posunutí dostaneme *analytické vyjádření posunuté souměrnosti (posunutého zrcadlení) dané osou souměrnosti o v ose x a vektorem posunutí* $\vec{p} = (p_1, 0)$, viz Obr. 69.

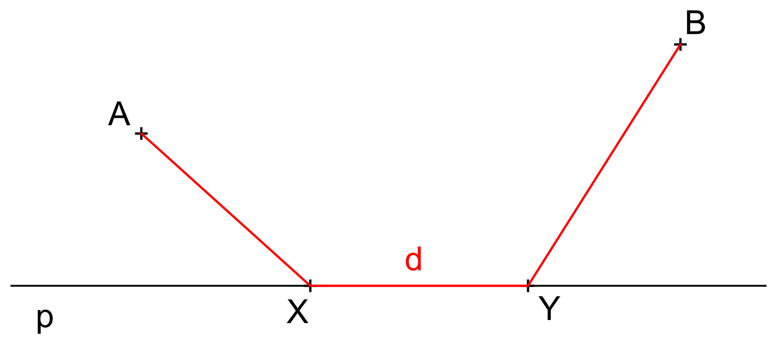


Obrázek 69: Posunuté zrcadlení $Ps: X \to X'$

$$Ps: \; x' = x + p_1,$$
$$y' = -y.$$

PŘÍKLAD 5.30. *Je dána přímka p a dva body A, B v téže polorovině s hraniční přímkou p Na přímce p sestrojte úsečku XY délky d tak, aby součet $|AX| + |XY| + |YB|$ byl co nejmenší, viz Obr. 70.*

Řešení: Úloha velmi připomíná *Heronův problém*, který byl námětem příkladu 5.16 na str. 49. Jediný rozdíl je v tom, že „kovboj se chce s koněm ještě projít podél řeky“, budeme-li se držet oblíbené interpretace tohoto problému pomocí příběhu kovboje a koně, kteří se vracejí do stáje.



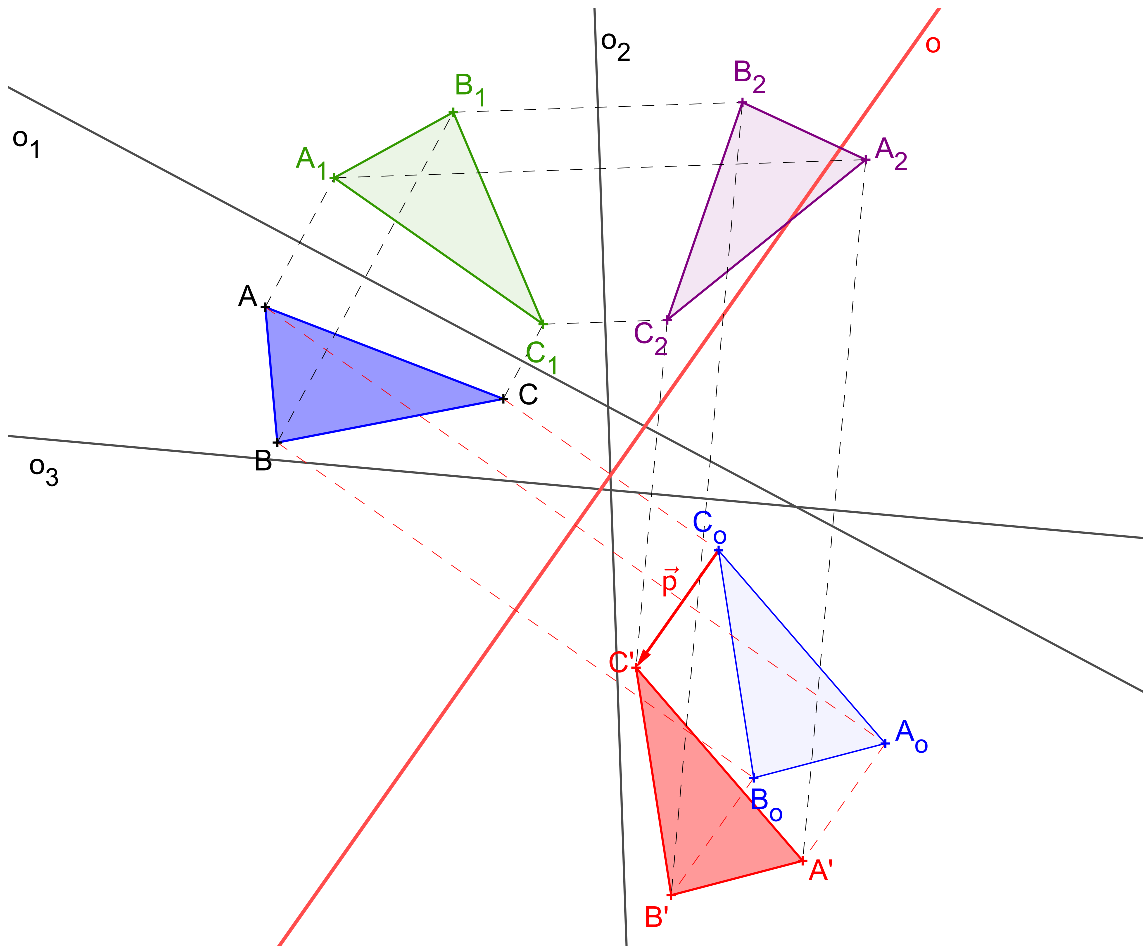
Obrázek 70: $|AX| + |XY| + |YB| = \min$

Navrhněte kompletní postup řešení této úlohy!

5.14.1 Posunutá souměrnost jako složené zobrazení

Věta 5 na str. 62 říká, že *každá shodnost v rovině se dá složit z nejvýše tří osových souměrností.* Zatím jsme použili jednu, na samotnou osovou souměrnost, nebo dvě, na vytvoření středové souměrnosti (dvě kolmé osy), otočení (dvě různoběžné osy) a posunutí (dvě rovnoběžné osy). Nyní, v souvislosti s posunutou souměrností, konečně přichází chvíle pro tři osy.

Posunutou souměrnost lze složit ze tří osových souměrností s různoběžnými osami, které všechny tři nemají společný bod. Tuto skutečnost ilustruje Obr. 71 (Interaktivní obrázek viz https://www.geogebra.org/m/avrrbx2j). Jsou zde zobrazeny tři (černé) různoběžné osy o_1, o_2, o_3, které příslušejí osovým souměrnostem $\mathcal{O}_1(o_1)$, $\mathcal{O}_2(o_2)$ a $\mathcal{O}_3(o_3)$, a jedna (červená) osa o, která přísluší posunuté souměrnosti Ps vytvořené složením $\mathcal{O}_3 \circ \mathcal{O}_2 \circ \mathcal{O}_1$ (skládání zobrazení viz definice 20 na str. 61). Trojúhelník ΔABC se zobrazí v $\mathcal{O}_1(o_1)$ na trojúhelník $\Delta A_1B_1C_1$, ten potom v $\mathcal{O}_2(o_2)$ na $\Delta A_2B_2C_2$ a ten nakonec v $\mathcal{O}_3(o_3)$ na výsledný trojúhelník $\Delta A'B'C'$. Stejný trojúhelník $\Delta A'B'C'$ je pak také výsledkem zobrazení ΔABC v posunuté souměrnosti Ps s osou o a vektorem posunutí $\vec{p}$. Jako mezikrok tohoto zobrazení je znázorněn $\Delta A_oB_oC_o$, obraz ΔABC v $\mathcal{O}(o)$.



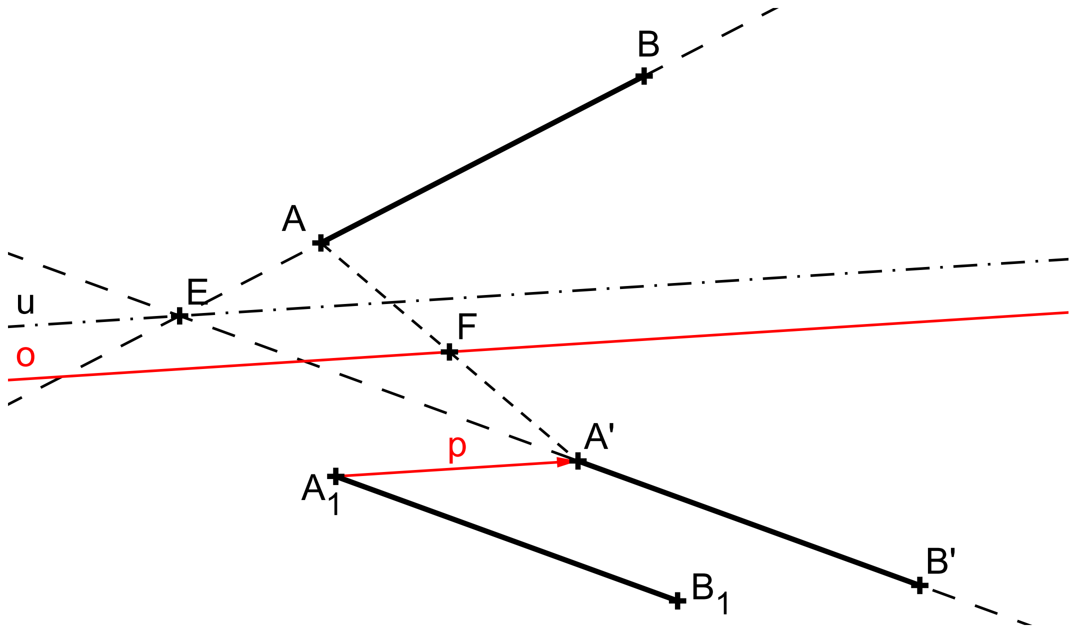
Obrázek 71: Posunutá souměrnost vznikne složením tří osových souměrností s různoběžnými osami, které nemají společný bod

Speciálním případem popsaného složení posunuté souměrnosti ze tří různoběžných os je situace, kdy úhel α mezi osami o_1 a o_2 je 90° a jejich složením tak vznikne středová souměrnost. Tomu je věnována následující věta

Věta 7. *Posunuté zrcadlení se dá složit z osové a středové souměrnosti, přičemž střed středové souměrnosti neleží na ose osové souměrnosti.*

PŘÍKLAD 5.31. *Nechť AB, $A'B'$ jsou různoběžné a shodné úsečky. Dokažte, že existuje posunuté zrcadlení nebo osová souměrnost, které převádějí body A, B po řadě v body A', B'.*

Řešení: To, že pro dvě stejně dlouhé různoběžné úsečky je vždy možné najít posunutou souměrnost, která jednu úsečku zobrazuje na druhou, je zřejmé z Obr. 72. Osa o prochází středem F úsečky spojující A a A' rovnoběžně s osou u úhlu přímek AB a $A'B'$. Velikost posunutí je rovna vzdálenosti bodů A_1 a A', kde A_1 je obrazem A v $\mathcal{O}(o)$.



Obrázek 72: Posunuté zrcadlení $Ps: AB \to A'B'$

5.15 Cvičení: Posunutá souměrnost

1. Jsou dány dvě různoběžky a, b a na nich dva body $A \neq B$ (A na a, B na b). Určete bod X na a a bod Y na b tak, aby platilo $|AX| = |BY|$ a dále aby:

a) $XY \parallel p$, kde p je daná přímka;

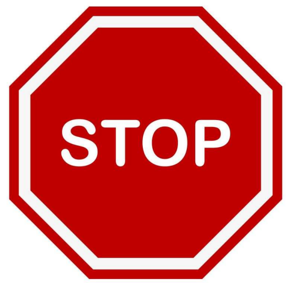
b) $XY = d$, kde d je předem daná úsečka;

c) střed úsečky XY ležel na dané přímce q.

2. Napište rovnice shodnosti roviny E_2, která vznikne složením tří osových souměrností s osami o_1, o_2, o_3 postupně o rovnicích: $x = 0$, $y = 0$, $x - 2y = 0$.

5.16 Identita

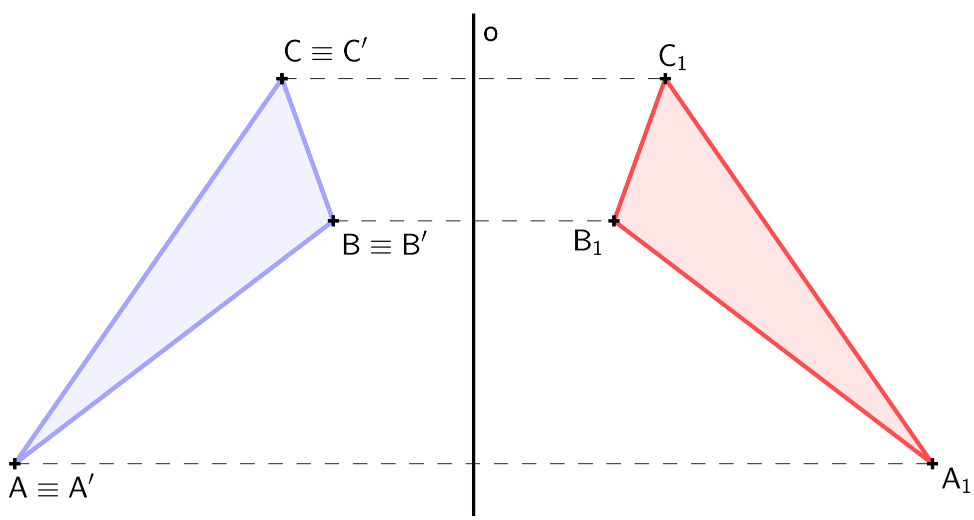
Identita je shodností, v níž se každý bod roviny zobrazí sám na sebe. Identitu značíme $\mathcal{I}$ a pro všechny body X roviny platí $\mathcal{I}: X \longrightarrow X$. V identitě jsou tedy *všechny body i směry samodružné.*



Obrázek 73: Identita; všechny body roviny jsou samodružné

Identita je *neutrálním prvkem grupy shodností* v rovině, viz str. 4 a 87. Je výsledkem složení libovolné shodnosti se zobrazením k ní inverzním.

Inverzní zobrazení k zobrazení $\mathcal{Z}$ značíme $\mathcal{Z}^{-1}$. Přitom inverzním zobrazením k osové souměrnosti $\mathcal{O}(o)$ je sama tato souměrnost, tj. $\mathcal{O}(o) \circ \mathcal{O}(o) = \mathcal{I}$, inverzním zobrazením ke středové souměrnosti $\mathcal{S}(S)$ je opět sama tato souměrnost, tj. $\mathcal{S}(S) \circ \mathcal{S}(S) = \mathcal{I}$. V případě otočení $\mathcal{R}(S, \alpha)$ je inverzním zobrazením otočení se stejným středem, ale opačným úhlem $\mathcal{R}^{-1}(S, \alpha) = \mathcal{R}(S, -\alpha)$, tj. $\mathcal{R}(S, -\alpha) \circ \mathcal{R}(S, \alpha) = \mathcal{I}$ a pro posunutí $\mathcal{T}(\vec{p})$ je inverzním zobrazením posunutí s opačným vektorem $\mathcal{T}^{-1}(\vec{p}) = \mathcal{T}(-\vec{p})$, tj. $\mathcal{T}(-\vec{p}) \circ \mathcal{T}(\vec{p}) = \mathcal{I}$. Konečně pro posunutou souměrnost $Ps(o, \vec{p})$ je inverzním zobrazením posunutá souměrnost $Ps^{-1}(o, \vec{p}) = Ps(o, -\vec{p})$, tj. $Ps(o, -\vec{p}) \circ Ps(o, \vec{p}) = \mathcal{I}$.



Obrázek 74: Identita $\mathcal{I}$ jako výsledek $\mathcal{O}(o) \circ \mathcal{O}(o)$

Z výše uvedených vztahů pro vznik identity složením shodnosti s k ní inverzním zobrazením vyplývá, že identita může sehrát významnou roli také při identifikaci *involutorního zobrazení* (*involuce*), viz str. 49. Můžeme říci, že *shodnost v rovině je involucí právě tehdy, když výsledkem jejího složení sama se sebou je identita*, jinak řečeno, *když je shodnost sama sobě inverzním zobrazením.* Viz Obr. 74. Trojúhelník ΔABC se nejprve v $\mathcal{O}(o)$ zobrazí na $\Delta A_1B_1C_1$, který se následně opět v $\mathcal{O}(o)$ zobrazí zpět na ΔABC. Platí tedy, že $\mathcal{O}(o) \circ \mathcal{O}(o) = \mathcal{I}$

PŘÍKLAD 5.32. *Pro zbývající involuce z množiny shodností v rovině sestrojte v GeoGebře obrázky ilustrující jejich složení sama se sebou analogický Obr. 74. (Uložte na svůj profil a pošlete odkaz)*