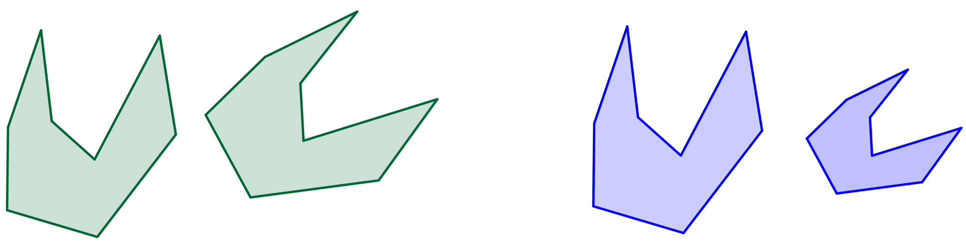
5 Shodná zobrazení v rovině

Nejběžnějšími zástupci afinních zobrazení ve školní matematice jsou shodná a podobná zobrazení. Těmi se teď budeme podrobně zabývat. Nejprve shodnými zobrazeními, potom podobnými. Již víme, že pokud se omezujeme na zobrazení v rámci jednoho prostoru, konkrétně pak roviny, můžeme hovořit zkráceně o *shodnostech* a *podobnostech* v rovině. Na Obr. 19 vidíme rozdíl mezi shodností a podobností. Zatímco shodnost zachovává rozměry i tvar útvaru, podobnost (přesněji *vlastní podobnost*, viz dále) zachovává jenom tvar.



Obrázek 19: Dvojice shodných (vlevo) a podobných (vpravo) útvarů

Zjednodušeně můžeme shodnosti charakterizovat jako transformace (zobrazení), která zachovávají vzdálenosti bodů (tj. vzdálenost obrazů je stejná jako vzdálenost vzorů). Říkáme, že vzdálenost je invariantem shodného zobrazení (které proto nazýváme také *izometrické zobrazení*). Shodné zobrazení tak můžeme definovat následujícím způsobem.

Definice 15. *Zobrazení v rovině, které každým dvěma bodům X, Y přiřazuje body X', Y' tak, že*

$$|X'Y'| = |XY|$$

se nazývá **shodné zobrazení** *v rovině (též izometrické zobrazení), viz Obr. 20.*

Obrázek 20: Vzdálenost se zachovává

PŘÍKLAD 5.1. *S použitím definice 15 dokažte následující vlastnosti shodného zobrazení:*

1. *Každé shodné zobrazení je prosté a afinní.*
2. *Úsečka se zobrazí na úsečku.*
3. *Polopřímka se zobrazí na polopřímku.*
4. *Přímka se zobrazí na přímku.*
5. *Rovnoběžky se zobrazí na rovnoběžky.*
6. *Úhel se zobrazí na úhel s ním shodný.*
7. *Polorovina se zobrazí na polorovinu.*

PŘÍKLAD 5.2. *Určete množinu možných poloh obrazu X' bodu $X[4,1]$ ve shodnosti f, pokud o tomto zobrazení máte následující informace:*

a) Bod $A[1,3]$ a jeho obraz $A'[-2,1]$.

b) Body $A[1,3]$, $B[3,0]$ a jejich obrazy $A'[-2,1]$, $B'[-5,3]$.

c) Body $A[1,3]$, $B[3,0]$, $C[2,-1]$ a jejich obrazy $A'[-2,1]$, $B'[-5,3]$, $C'[-6,2]$.

Řešení zobrazte v programu GeoGebra, umístěte na svůj profil na geogebra.org a sdílejte ve skupině PLA 2020.

Z řešení příkladu 5.2 vyplývá, že shodnost v rovině je jednoznačně určena trojicí nekolineárních bodů a jejich obrazy. To je obsahem následující věty.

Věta 3 (O určenosti shodného zobrazení v rovině)**.** *Shodné zobrazení v rovině je jednoznačně určeno libovolnými třemi nekolineárními body A, B, C a třemi nekolineárními body A', B', C', které jsou po řadě jejich obrazy.*

Důkaz: Naznačte pomocí obrázku.
(Inspirujte se při tom apletem https://www.geogebra.org/m/RYaKE4Jw)

Poznámka. Již víme, že analogická věta platí pro všechna afinní zobrazení v rovině (viz věta 2 o určenosti afinního zobrazení v rovině).

5.1 Rovnice shodnosti v rovině

V kapitole 4.1 jsme si uváděli, že každou afinitu f v rovině můžeme zapsat soustavou rovnic

$$\begin{aligned} f:\ x' &= a_{11}x + a_{12}y + b_1 \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + b_2, \end{aligned} \tag{21}$$

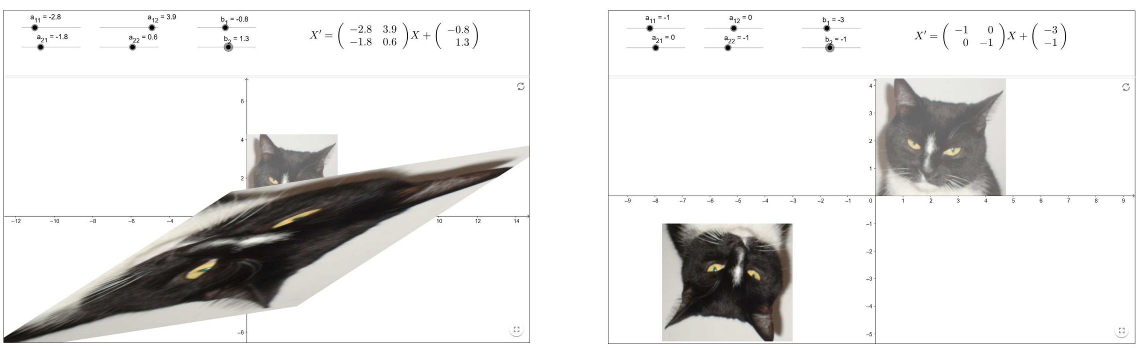
kterou lze přepsat užitím matic do tvaru

$$f:\ \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \tag{22}$$

a stručně vyjádřit maticovou rovnicí

$$f:\ X' = A \cdot X + B. \tag{23}$$

Mezi všemi možnými afinitami se nacházejí i shodnosti, viz Obr.21, kde vlevo je „nějaká“ afinita, zatímco vpravo je afinita, která je shodností. Ukazuje se, že vůbec není těžké zjistit, zda afinita daná některým z výše uvedených zápisů je shodností. Jak je detailně vysvětleno dále, stačí jednoduché posouzení matice A.



Obrázek 21: https://www.geogebra.org/m/UcqvE9uT)

Jak poznáme, že afinita daná rovnicemi (21) je shodností?

Je-li tato afinita shodností, platí pro všechny dvojice bodů $X[x_1, x_2], Y[y_1, y_2]$ a jejich obrazy $X'[x_1', x_2'], Y'[y_1', y_2']$ vztah $|X'Y'| = |XY|$, z něhož po dosazení souřadnic uvedených bodů dostaneme

$$\sqrt{(y_1' - x_1')^2 + (y_2' - x_2')^2} = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}, \tag{24}$$

po umocnění obou stran na druhou

$$(y_1' - x_1')^2 + (y_2' - x_2')^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2. \tag{25}$$

Nyní do levé strany (25) dosadíme z (21) (protože se body $X[x_1, x_2], Y[y_1, y_2]$ zobrazují v daném pořadí na body $X'[x_1', x_2'], Y'[y_1', y_2']$, dosazujeme takto: $x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1,\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2$; $y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + b_1,\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + b_2$). Dostaneme rovnost

$$\begin{aligned}(a_{11}y_1 + a_{12}y_2 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2)^2 + (a_{21}y_1 + a_{22}y_2 - a_{21}x_1 + a_{22}x_2)^2 \\ = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2,\end{aligned} \tag{26}$$

kterou postupně upravíme na tvar obsahující výrazy $(y_1 - x_1)$ a $(y_2 - x_2)$. Nejprve vytkneme společné koeficienty

$$\begin{aligned}[a_{11}(y_1 - x_1) + a_{12}(y_2 - x_2)]^2 + [a_{21}(y_1 - x_1) + a_{22}(y_2 - x_2)]^2 \\ = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2,\end{aligned} \tag{27}$$

potom umocníme závorky na levé straně a zjednodušíme ji na tvar polynomu s proměnnými $(y_1 - x_1)$ a $(y_2 - x_2)$

$$\begin{aligned}(a_{11}^2 + a_{21}^2)(y_1 - x_1)^2 + 2(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22})(y_1 - x_1)(y_2 - x_2) + (a_{12}^2 + a_{22}^2)(y_2 - x_2)^2 \\ = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2.\end{aligned} \tag{28}$$

Nyní diskutujeme, za jakých podmínek je v (28) splněna rovnost levé strany s pravou stranou (využijeme toho, že dva polynomy jsou si rovny pro všechny hodnoty z příslušného oboru právě tehdy, když se rovnají koeficienty u sobě odpovídajících členů). Zjistíme tak, že rovnost $|X'Y'| = |XY|$ nastává právě tehdy, když jsou pro prvky matice A (tj. koeficienty soustavy (21)) splněny vztahy

$$\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{21}^2 &= 1, \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 &= 1, \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} &= 0, \end{aligned} \tag{29}$$

které lze stručně vyjádřit rovností

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{30}$$

Odpověď na výše uvedenou otázku je tedy taková, že **rovnice** (21) **je rovnicí shodnosti, právě když platí**

$$A^T \cdot A = E, \tag{31}$$

kde E je jednotková matice. Matici A, která splňuje vztah (31), nazýváme *ortonormální* maticí. Stručně proto můžeme konstatovat, že afinita daná rovnicí (21) je shodností právě tehdy, když je matice A *ortonormální*.

Poznámky.

1. Platí $A^T \cdot A = E$. Potom je ale $A^T = A^{-1}$ a platí tedy i rovnost $A \cdot A^T = E$.

2. Zobrazení, pro která platí $|\det A| = 1$ nazýváme ekviafinní zobrazení, stručně **ekviafinity**. Je zřejmé, že každá shodnost je ekviafinita. Platí toto tvrzení i obráceně? Můžeme říci, že každá ekviafinita je shodností?

3. Je třeba si uvědomit, že při shodném zobrazení mezi euklidovskými prostory různých dimenzí není matice A čtvercová. Potom výše uvedené úvahy o inverzní matici nemají smysl a v platnosti zůstává pouze původní podmínka $A^T \cdot A = E$.

PŘÍKLAD 5.3. *Zapsáním formou rovnic ve tvaru* (21) *uveďte alespoň tři příklady ekviafinity, která není shodností.*

PŘÍKLAD 5.4. *Rozhodněte, zda je afinita daná rovnicemi* $x' = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + 8, y' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 6$ *shodností.*

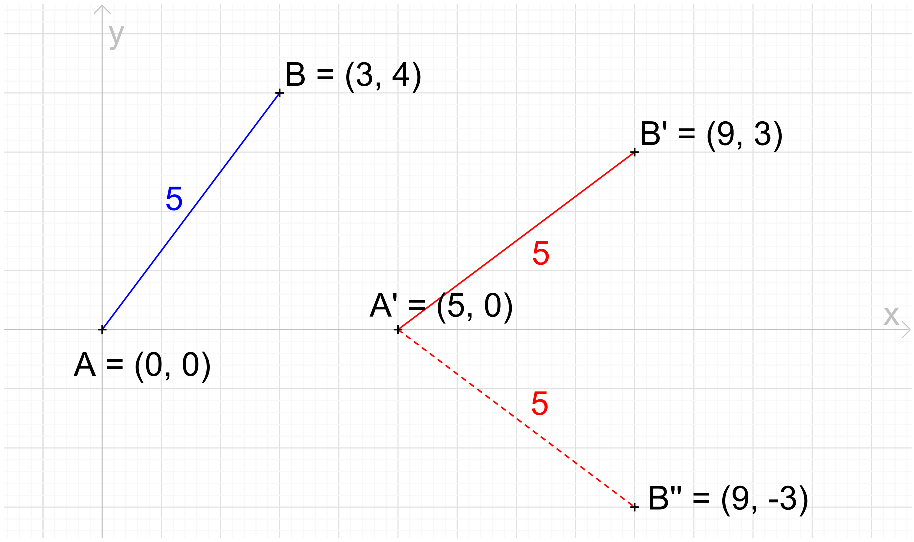
Řešení: Viz (31) na str. 26. Matice uvedené transformace je $A = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$. Vytvořte A^T a dle (31) rozhodněte.

PŘÍKLAD 5.5. *Určete parametr s tak, aby existovala shodnost roviny zobrazující body* $[0, 0]$, $[3, 4]$ *po řadě na body* $[5, 0]$, $[9, s]$. *Napište rovnice tohoto zobrazení a určete souřadnice obrazu bodu* $[5, 0]$.

Řešení: Vyjdeme z definice 15 shodného zobrazení, viz str. 23. Označme si dané body $A = [0, 0]$, $B = [3, 4]$ a jejich obrazy $A' = [5, 0]$, $B' = [9, s]$. Potom platí $|A'B'| = |AB|$, tj. $(9-5)^2 + (s-0)^2 = (3-0)^2 + (4-0)^2$ (ty nuly se tam samozřejmě psát nemusí, dělám to pro větší názornost)[4], po úpravě $16 + s^2 = 25$, tj. $|s| = 3$. Úloha má proto dvě řešení, jedno pro $s = 3$, druhé pro $s = -3$, viz Obr. 22.

Nyní určíme rovnice tohoto zobrazení. Jak už víme, shodnost patří mezi afinity. Hledáme proto rovnice ve tvaru soustavy (21). Postupně do této soustavy dosadíme hodnoty známých bodů a jejich obrazů, pro každé ze dvou řešení zvlášť, a hledáme hodnoty koeficientů a_{ij} a b_i.

[4]Pro vzdálenost $|AB|$ bodů $A[a_1, a_2]$, $B[b_1, b_2]$ platí $|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$.



Obrázek 22: Zadání příkladu 5.5 vyhovují dvě hodnoty parametru s, 3 a -3

Nejprve řešíme pro $s = 3$. Dostaneme

$$\begin{array}{rcrcrcr} 5 & = & a_{11}0 & + & a_{12}0 & + & b_1, \\ 0 & = & a_{21}0 & + & a_{22}0 & + & b_2, \\ 9 & = & a_{11}3 & + & a_{12}4 & + & b_1 \\ 3 & = & a_{21}3 & + & a_{22}4 & + & b_2, \end{array} \tag{32}$$

což jsou jenom čtyři rovnice pro šest neznámých $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$. Přidáme-li ale ještě podmínky (29), které musí tyto koeficienty splňovat u shodného zobrazení, dostaneme soustavu sedmi rovnic. Pokud se nám nechce soustavu řešit ručně, můžeme tuto práci přenechat počítači. Níže uvádím kód řešení v programu wxMaxima, volně stažitelném na stránce wxmaxima-developers.github.io. Úvod do práce s tímto programem najdete např. zde: *Program wxMaxima ve výuce matematiky.*

(% i14)
```
r1:5=a11*0+a12*0+b1;
r2:0=a21*0+a22*0+b2;
r3:9=a11*3+a12*4+b1;
r4:3=a21*3+a22*4+b2;
r5:a11^2+a21^2=1;
r6:a12^2+a22^2=1;
r7:a11*a12+a21*a22=0;
```

$$5 = b1 \tag{r1}$$

$$0 = b2 \tag{r2}$$

$$9 = b1 + 4a12 + 3a11 \tag{r3}$$

$$3 = b2 + 4a22 + 3a21 \tag{r4}$$

$$a21^2 + a11^2 = 1 \tag{r5}$$

$$a22^2 + a12^2 = 1 \tag{r6}$$

$$a21\ a22 + a11\ a12 = 0 \tag{r7}$$

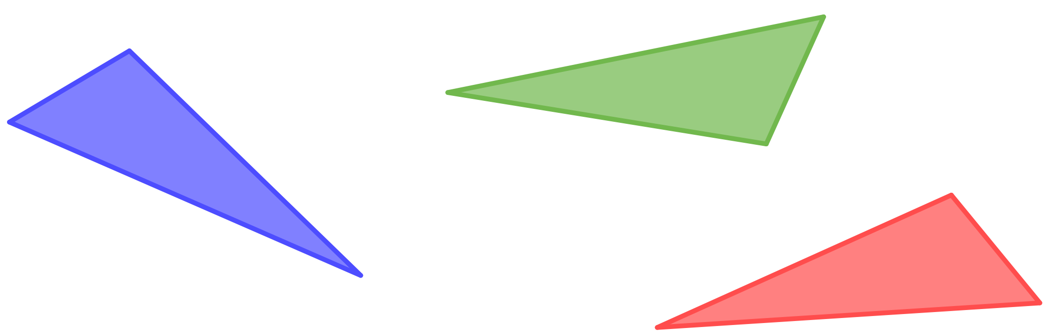
(% i15) solve([r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7],[a11,a12,a21,a22,b1,b2]);

$$[[a11 = \frac{24}{25}, a12 = \frac{7}{25}, a21 = -\frac{7}{25}, a22 = \frac{24}{25}, b1 = 5, b2 = 0], \tag{\% o15}$$
$$[a11 = 0, a12 = 1, a21 = 1, a22 = 0, b1 = 5, b2 = 0]]$$

Pro $s = 3$ tedy existují dvě shodná zobrazení, označme je f_1 a f_2, která zobrazují body $A[0, 0], B[3, 4]$ na body $A'[5, 0], B'[9, 3]$;

$$f_1: \begin{aligned} x' &= \frac{24}{25}x + \frac{7}{25}y + 5, \\ y' &= -\frac{7}{25}x + \frac{24}{25}y, \end{aligned} \qquad f_2: \begin{aligned} x' &= y + 5, \\ y' &= x. \end{aligned}$$

Tento výsledek je v souladu s větou 3 o určenosti shodného zobrazení v rovině, viz str. 24. Dva body a jejich obrazy neurčují shodnost v rovině jednoznačně. Proto nám vyšla dvě zobrazení. Jaký je mezi nimi rozdíl můžete zjistit pomocí následujícího appletu: https://www.geogebra.org/m/ctubxkrv. Zobrazení f_1 je *přímou shodností*, zatímco zobrazení f_2 je *nepřímou shodností*. Pojmy *přímá* a *nepřímá* shodnost jsou ilustrovány Obr. 23. Přímo shodné útvary lze manipulací v rovině ztotožnit (dostat



Obrázek 23: Shodné trojúhelníky, přímo i nepřímo

do zákrytu), to je případ modrého a zeleného trojúhelníku. Nepřímo shodné útvary nelze ztotožnit manipulací v rovině, vždy budou zrcadlově převrácené, to je případ modrého a červeného trojúhelníku, také ale toho zeleného s červeným[5].

Nyní hledáme shodnost pro $s = -3$, takovou, která zobrazí body $A[0,0], B[3,4]$ postupně v daném pořadí na body $A'[5,0]$ a $B''[9,-3]$, viz Obr. 22. Opět dosadíme do soustavy (21). Tentokrát dostaneme rovnice

$$\begin{array}{rcrcrcl} 5 &=& a_{11}0 &+& a_{12}0 &+& b_1, \\ 0 &=& a_{21}0 &+& a_{22}0 &+& b_2, \\ 9 &=& a_{11}3 &+& a_{12}4 &+& b_1 \\ -3 &=& a_{21}3 &+& a_{22}4 &+& b_2, \end{array} \tag{33}$$

které opět doplníme podmínkami shodnosti (29), abychom dostali sedm rovnic pro neznámé $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$. Tuto soustavu zase řešíme v programu wxMaxima:

(% i14)
```
r1:5=a11*0+a12*0+b1;
r2:0=a21*0+a22*0+b2;
r3:9=a11*3+a12*4+b1;
r4:-3=a21*3+a22*4+b2;
r5:a11^2+a21^2=1;
r6:a12^2+a22^2=1;
r7:a11*a12+a21*a22=0;
```

$$5 = b1 \tag{r1}$$

$$0 = b2 \tag{r2}$$

$$9 = b1 + 4a12 + 3a11 \tag{r3}$$

$$-3 = b2 + 4a22 + 3a21 \tag{r4}$$

$$a21^2 + a11^2 = 1 \tag{r5}$$

$$a22^2 + a12^2 = 1 \tag{r6}$$

$$a21\ a22 + a11\ a12 = 0 \tag{r7}$$

(% i15)
```
solve([r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7],[a11,a12,a21,a22,b1,b2]);
```

$$[[a11 = \frac{24}{25}, a12 = \frac{7}{25}, a21 = \frac{7}{25}, a22 = -\frac{24}{25}, b1 = 5, b2 = 0], \tag{\% o15}$$
$$[a11 = 0, a12 = 1, a21 = -1, a22 = 0, b1 = 5, b2 = 0]]$$

[5] Přímými shodnostmi jsou *posunutí*, *otočení*, *středová souměrnost* a *identita*, nepřímými shodnostmi jsou potom *osová souměrnost* a *posunuté zrcadlení*

Pro $s = -3$ tak dostáváme také dvě shodnosti, g_1 a g_2, které zobrazují body $A[0,0], B[3,4]$ na body $A'[5,0], B''[9,-3]$;

$$g_1: \begin{aligned} x' &= \frac{24}{25}x + \frac{7}{25}y + 5, \\ y' &= \frac{7}{25}x - \frac{24}{25}y, \end{aligned} \qquad g_2: \begin{aligned} x' &= y + 5, \\ y' &= -x. \end{aligned}$$

Opět použijeme applet https://www.geogebra.org/m/ctubxkrv k prozkoumání povahy výsledných zobrazení. Zjistíme, že g_1 je nepřímou shodností a g_2 přímou shodností.

Při hlubším studiu afinit bychom odhalili jednoznačnou korespondenci mezi znaménkem determinantu matice A konkrétní afinity a tím, zda se jedná o přímé nebo nepřímé zobrazení[6]. *Vypočítejte determinant matice A každého ze zobrazení f_1, f_2, g_1, g_2 a vyslovte hypotézu o souvislosti znaménka determinantu s tím, zda je zobrazení přímou nebo nepřímou shodností.*

Ještě zbývá poslední úkol z příkladu 5.5, určit souřadnice obrazu bodu $[5,0]$. Samozřejmě ve všech čtyřech zobrazeních f_1, f_2, g_1, g_2. Najděte tyto obrazy!

PŘÍKLAD 5.6. *Určete a, b, c tak, aby rovnice* $x' = \frac{3}{4}x + by + 1, \quad y' = ax + cy - 1$ *vyjadřovaly shodnost.*

Řešení: Na str. 26 je uvedeno, že matice A shodnosti je *ortonormální*. Když se podíváte na dosud uvedené matice shodností, určitě si všimnete, že se v nich, až na znaménko, vyskytují jako prvky jenom dvě hodnoty. Které mají navíc poměrně úzký vztah. Využijte toho!

PŘÍKLAD 5.7. *Určete koeficienty a, b, c tak, aby bylo uvedenými rovnicemi dáno shodné zobrazení:*

a) $x' = ax + by + 1,\ y' = cx + \frac{1}{2}y - 1.$

b) $x' = x + by - 2,\ y' = ax + cy + 1.$

Řešení: Stejně jako předchozí příklad 5.6.

[6]Determinant matice A afinity nazýváme *modul afinity* δ. Zatímco jeho znaménko koresponduje s tím, zda se jedná o přímou ($\delta > 0$) nebo nepřímou ($\delta < 0$) afinitu, jeho absolutní hodnota udává poměr mezi obsahem (objemem) výsledného útvaru a jeho vzoru, viz např. http://home.pf.jcu.cz/ hasek/GEO2/AfinitaModul.pdf.

PŘÍKLAD 5.8. *Určete p, q tak, aby existovala shodnost zobrazující body $[3,0]$, $[1,2]$, $[-1,-1]$ po řadě na body $[1,4]$, $[p,2]$, $[2,q]$. Najděte samodružné body a směry tohoto zobrazení.*

Řešení: Vyjdeme z definice 15 shodného zobrazení, viz str. 23. Označme dané body $A[3,0]$, $B[1,2]$, $C[-1,-1]$. Potom jejich obrazy jsou dle zadání postupně body $A'[1,4]$, $B'[p,2]$ a $C'[2,q]$. Musí tedy platit $|AB| = |A'B'|$, $|BC| = |B'C'|$ a $|CA| = |C'A'|$. Příslušné rovnice, jejichž tvar vychází ze vztahu pro výpočet vzdálenosti dvou bodů, řešíme opět v programu wxMaxima:

(% i6)
```
r1:(p-1)^2+4=8;
r2:(p-2)^2+(2-q)^2=13;
r3:1+(q-4)^2=17;
```

$$(p-1)^2+4=8 \tag{r1}$$

$$(2-q)^2+(p-2)^2=13 \tag{r2}$$

$$(q-4)^2+1=17 \tag{r3}$$

(% i7)
```
solve([r1,r2,r3],[p,q]);
```

$$[[p=-1,q=0]] \tag{\% o7}$$

Hledaná shodnost existuje pro hodnoty parametrů $p = -1$ a $q = 0$. Dle věty 3 o určenosti shodného zobrazení v rovině, uvedené na str. 24, je trojicí nekolineárních bodů a jejich obrazů shodnost určena jednoznačně. Pojďme tedy najít její rovnice. Do obecného vyjádření afinity v rovině (21), viz str. 25, dosadíme postupně souřadnice dvojic bodů ve vztahu vzor a obraz, tj. $A[3,0] \to A'[1,4]$, $B[1,2] \to B'[-1,2]$ a $C[-1,-1] \to C'[2,0]$. Dostaneme soustavu šesti rovnic o šesti neznámých a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2. V následujícím kódu řešení ve wxMaximě jsou označeny $r1, r2, \ldots, r6$.

(% i12)
```
r1:1=a11*3+a12*0+b1;
r2:4=a21*3+a22*0+b2;
r3:-1=a11+a12*2+b1;
r4:2=a21+a22*2+b2;
r5:2=-a11-a12+b1;
r6:0=-a21-a22+b2;
```

$$1 = b1 + 3a11 \tag{r1}$$

$$4 = b2 + 3a21 \tag{r2}$$

$$-1 = b1 + 2a12 + a11 \tag{r3}$$

$$2 = b2 + 2a22 + a21 \tag{r4}$$

$$2 = b1 - a12 - a11 \tag{r5}$$

$$0 = b2 - a22 - a21 \tag{r6}$$

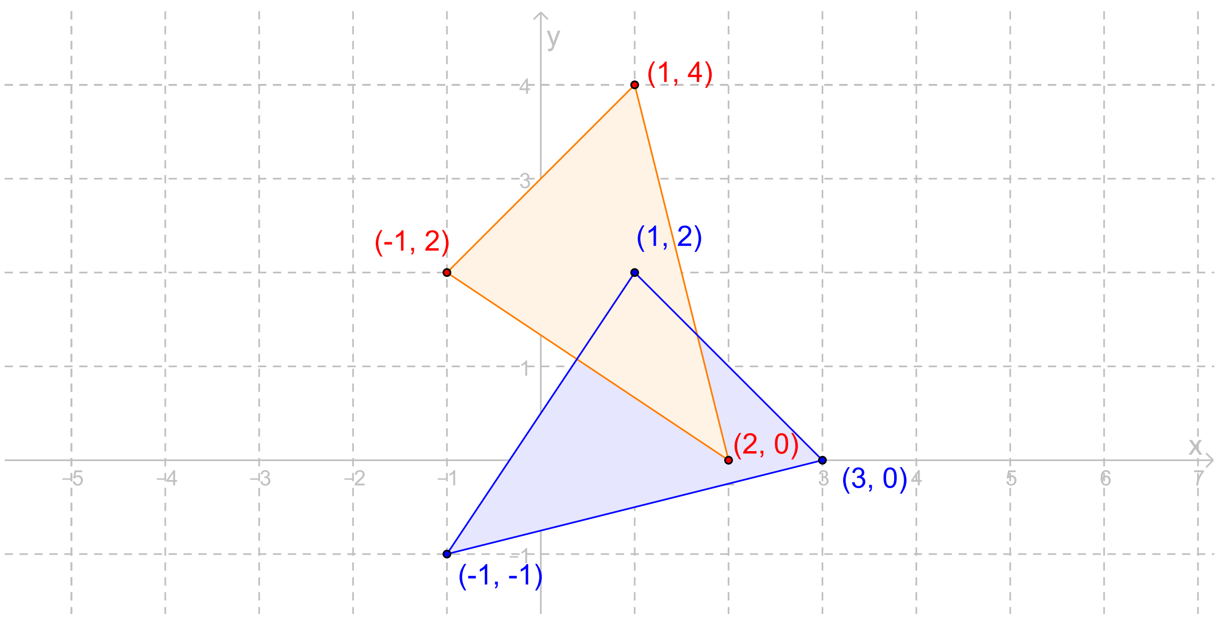
(% i13) solve([r1,r2,r3,r4,r5,r6],[a11,a12,a21,a22,b1,b2]);

$$[[a11 = 0, a12 = -1, a21 = 1, a22 = 0, b1 = 1, b2 = 1]] \tag{\% o13}$$

Příslušná shodnost má tedy rovnice

$$\begin{aligned} f:\ x' &= -y + 1, \\ y' &= x + 1. \end{aligned}$$

O tom, že funguje tak, jak požaduje zadání, se můžeme přesvědčit opět pomocí interaktivního appletu https://www.geogebra.org/m/kwc6rrsw, jak známe z předchozích příkladů. Zobrazení příslušných tří bodů je zachyceno také na Obr. 24. Při



Obrázek 24: O jakou ze shodností se jedná?

pohledu na něj se nabízí otázka, o jakou shodnost se jedná (posunutí ani identita to určitě nebude, na středovou souměrnost to také nevypadá, že by tedy otočení?). Otázkou, jak určit, o jakou konkrétní shodnost se jedná, známe-li rovnice zobrazení, se budeme zabývat v dalších kapitolách 5.2 a 5.3. Potřebujeme k tomu umět určit z rovnic afinního zobrazení jeho *samodružné body* a *samodružné směry*.

5.2 Samodružné body a samodružné směry shodností v rovině

Ze základní a střední školy si určitě pamatujete většinu ze shodností v rovině. Jsou to *identita*, *osová souměrnost*, *středová souměrnost*, *otočení*, *posunutí* a *posunuté zrcadlení*. Víte, že střed středové souměrnosti, případně střed otočení, se zobrazí sám na sebe. Také bezesporu víte, že ve středové souměrnosti, případně v posunutí, se přímka zobrazí na přímku s ní rovnoběžnou. Jedná se o vlastnosti, které se popisují pomocí pojmů *samodružný bod* a *samodružný směr*.

Samodružným bodem (afinního) zobrazení rozumíme bod, který se zobrazí sám na sebe, tj. pro jeho souřadnice $X[x, y]$ a souřadnice jeho obrazu $X'[x', y']$ platí $x' = x,\ y' = y$.

Pokud do rovnic (21) dosadíme $x' = x$ a $y' = y$, je zřejmé, že souřadnice samodružných bodů daného zobrazení jsou řešením soustavy rovnic

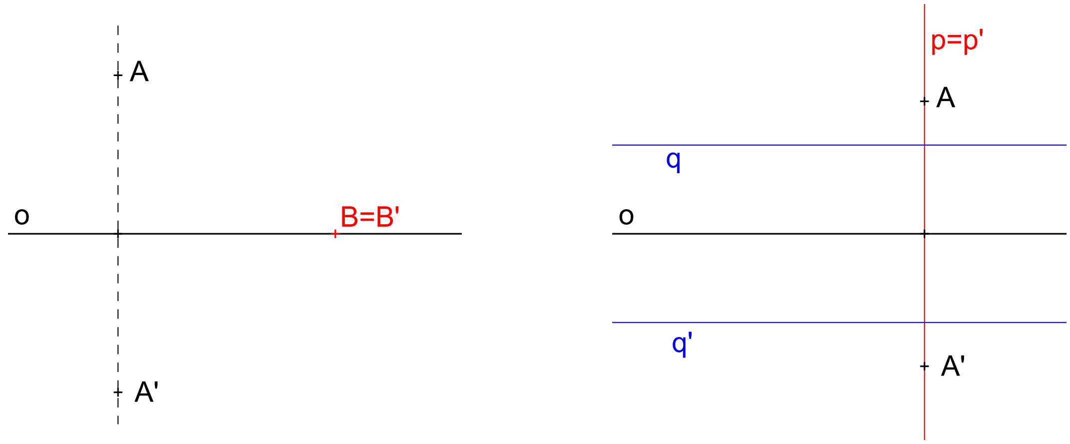
$$\begin{aligned} (1 - a_{11})x - a_{12}y &= b_1 \\ -a_{21}x + (1 - a_{22})y &= b_2. \end{aligned} \tag{34}$$

Samodružným směrem rozumíme směr, který se v (afinním) zobrazení zobrazí sám na sebe.

Pro vyjádření směru používáme vektor, např. $\vec{u}$. Příslušný „směr“ potom může reprezentovat každý jeho násobek $\lambda\vec{u}$, kde $\lambda \in \mathbb{R}$. Má-li tedy být směr reprezentovaný vektorem $\vec{u}$ samodružný, musí pro vektor $\vec{u}'$, který je obrazem vektoru $\vec{u}$, platit, že reprezentuje stejný směr, tj. $\vec{u}' = \lambda\vec{u}$, kde $\lambda \in \mathbb{R}$. Jak je uvedeno výše, samodružné body vypočítáme řešením soustavy 34. Abychom dokázali vypočítat i samodružné směry, musíme si nejprve zavést pojem *asociovaný homomorfismus*, viz str. 36. Tomu se budeme věnovat až v další kapitole, kde se na detailní výpočet samodružných bodů a směrů zaměříme.

Pro každou shodnost v rovině je typická kombinace samodružných bodů a směrů. Je to jakýsi její unikátní identifikátor. Jako příklad si uveďme osovou souměrnost $\mathcal{O}(o)$, viz Obr. 25. Ta má nekonečně mnoho samodružných bodů, které tvoří osu o souměrnosti, viz např. bod B na Obr. 25, vlevo. Samodružné směry má potom dva, kolmý na osu osové souměrnosti a rovnoběžný s osou osové souměrnosti, viz přímky p, q a jejich obrazy.

Na Obr. 25 také můžeme pozorovat rozdíl mezi pojmy *přímka samodružných bodů* a *samodružná přímka*. Přímkou samodružných bodů je osa o osové souměrnosti, každý její bod je totiž samodružný. Samodružnou přímkou je potom přímka p, která se zobrazuje sama na sebe, kromě průsečíku s osou o ale nemá žádný další samodružný



Obrázek 25: Samodružným bodem je každý bod osy osové souměrnosti (osa souměrnosti je tzv. přímkou samodružných bodů). Samodružné směry osové souměrnosti jsou dva, kolmý na osu souměrnosti a rovnoběžný s osou souměrnosti.

bod. Všechny její ostatní body se zobrazují jako bod A, do jiného bodu, ale opět ležícího na přímce p, viz obraz A'.

PŘÍKLAD 5.9. *Vyplňte následující tabulku samodružných bodů a směrů pro všechny shodnosti v rovině. U každého zobrazení uvádějte počty samodružných bodů a směrů (je-li směrů více, tak jejich vzájemné odchylky).*

shodnost	*samodružné body*	*samodružné směry*
identita		
osová souměrnost		
středová souměrnost		
otočení		
posunutí		
posunuté zrcadlení		

Řešení: Níže uvádím tabulku vyplněnou. Prosím, abyste s ní pracovali ku prospěchu svého poznání. Použijte ji pro kontrolu svého řešení, nebo jako zdroj pro další studium, přemýšlení a dotazování.

shodnost	samodružné body	samodružné směry
identita	každý bod roviny	každý směr
osová souměrnost	každý bod osy o	dva, vzájemně kolmé (kolmý na o a rovnoběžný s o)
středová souměrnost	jeden (střed souměrnosti)	každý směr
otočení	jeden (střed otočení)	žádný
posunutí	žádný	každý
posunuté zrcadlení	žádný	dva, vzájemně kolmé (kolmý na o a rovnoběžný s o)