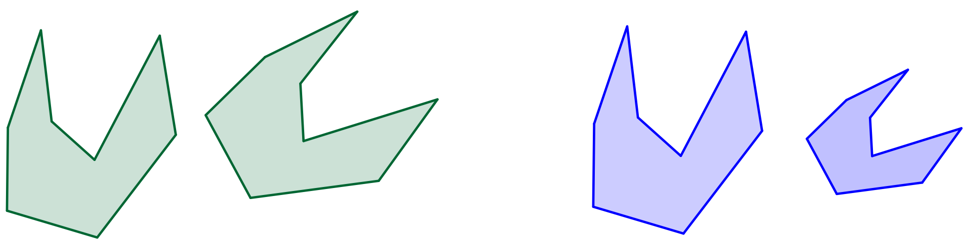
5 Shodná zobrazení v rovině

Nejběžnějšími zástupci afinních zobrazení ve školní matematice jsou shodná a podobná zobrazení. Těmi se teď budeme podrobně zabývat. Nejprve shodnými zobrazeními, potom podobnými. Již víme, že pokud se omezujeme na zobrazení v rámci jednoho prostoru, konkrétně pak roviny, můžeme hovořit zkráceně o *shodnostech* a *podobnostech* v rovině. Na Obr. 19 vidíme rozdíl mezi shodností a podobností. Zatímco shodnost zachovává rozměry i tvar útvaru, podobnost (přesněji *vlastní podobnost*, viz dále) zachovává jenom tvar.



Obrázek 19: Dvojice shodných (vlevo) a podobných (vpravo) útvarů

Zjednodušeně můžeme shodnosti charakterizovat jako transformace (zobrazení), která zachovávají vzdálenosti bodů (tj. vzdálenost obrazů je stejná jako vzdálenost vzorů). Říkáme, že vzdálenost je invariantem shodného zobrazení (které proto nazýváme také *izometrické zobrazení*). Shodné zobrazení tak můžeme definovat následujícím způsobem.

Definice 15. *Zobrazení v rovině, které každým dvěma bodům X, Y přiřazuje body X', Y' tak, že*

$$|X'Y'| = |XY|$$

se nazývá **shodné zobrazení** *v rovině (též izometrické zobrazení), viz Obr. 20.*

Obrázek 20: Vzdálenost se zachovává

PŘÍKLAD 5.1. *S použitím definice 15 dokažte následující vlastnosti shodného zobrazení:*

1. *Každé shodné zobrazení je prosté a afinní.*
2. *Úsečka se zobrazí na úsečku.*
3. *Polopřímka se zobrazí na polopřímku.*
4. *Přímka se zobrazí na přímku.*
5. *Rovnoběžky se zobrazí na rovnoběžky.*
6. *Úhel se zobrazí na úhel s ním shodný.*
7. *Polorovina se zobrazí na polorovinu.*

PŘÍKLAD 5.2. *Určete množinu možných poloh obrazu X' bodu $X[4,1]$ ve shodnosti f, pokud o tomto zobrazení máte následující informace:*

a) Bod $A[1,3]$ a jeho obraz $A'[-2,1]$.

b) Body $A[1,3]$, $B[3,0]$ a jejich obrazy $A'[-2,1]$, $B'[-5,3]$.

c) Body $A[1,3]$, $B[3,0]$, $C[2,-1]$ a jejich obrazy $A'[-2,1]$, $B'[-5,3]$, $C'[-6,2]$.

Řešení zobrazte v programu GeoGebra, umístěte na svůj profil na geogebra.org a sdílejte ve skupině PLA 2020.

Z řešení příkladu 5.2 vyplývá, že shodnost v rovině je jednoznačně určena trojicí nekolineárních bodů a jejich obrazy. To je obsahem následující věty.

Věta 3 (O určenosti shodného zobrazení v rovině)**.** *Shodné zobrazení v rovině je jednoznačně určeno libovolnými třemi nekolineárními body A, B, C a třemi nekolineárními body A', B', C', které jsou po řadě jejich obrazy.*

Důkaz: Naznačte pomocí obrázku.
(Inspirujte se při tom apletem https://www.geogebra.org/m/RYaKE4Jw)

Poznámka. Již víme, že analogická věta platí pro všechna afinní zobrazení v rovině (viz věta 2 o určenosti afinního zobrazení v rovině).

5.1 Rovnice shodnosti v rovině

V kapitole 4.1 jsme si uváděli, že každou afinitu f v rovině můžeme zapsat soustavou rovnic

$$\begin{aligned} f:\ x' &= a_{11}x + a_{12}y + b_1 \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + b_2, \end{aligned} \tag{21}$$

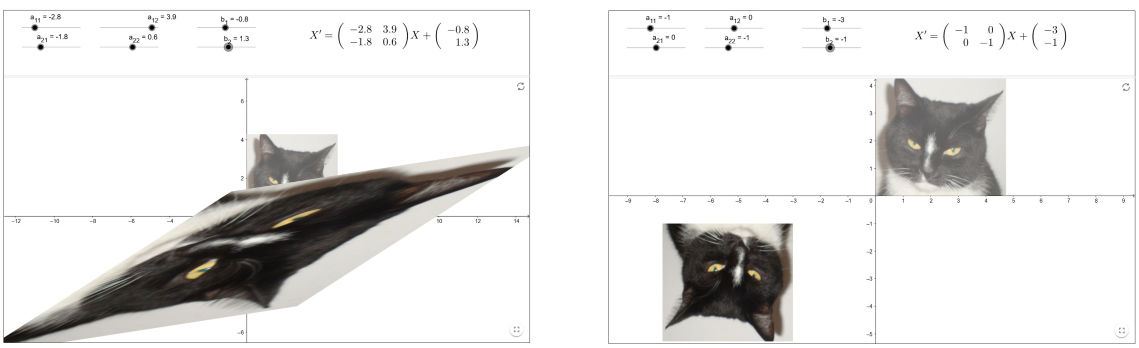
kterou lze přepsat užitím matic do tvaru

$$f:\ \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \tag{22}$$

a stručně vyjádřit maticovou rovnicí

$$f:\ X' = A \cdot X + B. \tag{23}$$

Mezi všemi možnými afinitami se nacházejí i shodnosti, viz Obr.21, kde vlevo je „nějaká“ afinita, zatímco vpravo je afinita, která je shodností. Ukazuje se, že vůbec není těžké zjistit, zda afinita daná některým z výše uvedených zápisů je shodností. Jak je detailně vysvětleno dále, stačí jednoduché posouzení matice A.



Obrázek 21: https://www.geogebra.org/m/UcqvE9uT)

Jak poznáme, že afinita daná rovnicemi (21) je shodností?

Je-li tato afinita shodností, platí pro všechny dvojice bodů $X[x_1, x_2], Y[y_1, y_2]$ a jejich obrazy $X'[x_1', x_2'], Y'[y_1', y_2']$ vztah $|X'Y'| = |XY|$, z něhož po dosazení souřadnic uvedených bodů dostaneme

$$\sqrt{(y_1' - x_1')^2 + (y_2' - x_2')^2} = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}, \tag{24}$$

po umocnění obou stran na druhou

$$(y_1' - x_1')^2 + (y_2' - x_2')^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2. \tag{25}$$

Nyní do levé strany (25) dosadíme z (21) (protože se body $X[x_1, x_2], Y[y_1, y_2]$ zobrazují v daném pořadí na body $X'[x'_1, x'_2], Y'[y'_1, y'_2]$, dosazujeme takto: $x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1,\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2$; $y'_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + b_1,\ y'_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + b_2$). Dostaneme rovnost

$$\begin{aligned}(a_{11}y_1 + a_{12}y_2 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2)^2 + (a_{21}y_1 + a_{22}y_2 - a_{21}x_1 + a_{22}x_2)^2 \\ = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2,\end{aligned} \tag{26}$$

kterou postupně upravíme na tvar obsahující výrazy $(y_1 - x_1)$ a $(y_2 - x_2)$. Nejprve vytkneme společné koeficienty

$$\begin{aligned}[a_{11}(y_1 - x_1) + a_{12}(y_2 - x_2)]^2 + [a_{21}(y_1 - x_1) + a_{22}(y_2 - x_2)]^2 \\ = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2,\end{aligned} \tag{27}$$

potom umocníme závorky na levé straně a zjednodušíme ji na tvar polynomu s proměnnými $(y_1 - x_1)$ a $(y_2 - x_2)$

$$\begin{aligned}(a_{11}^2 + a_{21}^2)(y_1 - x_1)^2 + 2(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22})(y_1 - x_1)(y_2 - x_2) + (a_{12}^2 + a_{22}^2)(y_2 - x_2)^2 \\ = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2.\end{aligned} \tag{28}$$

Nyní diskutujeme, za jakých podmínek je v (28) splněna rovnost levé strany s pravou stranou (využijeme toho, že dva polynomy jsou si rovny pro všechny hodnoty z příslušného oboru právě tehdy, když se rovnají koeficienty u sobě odpovídajících členů). Zjistíme tak, že rovnost $|X'Y'| = |XY|$ nastává právě tehdy, když jsou pro prvky matice A (tj. koeficienty soustavy (21)) splněny vztahy

$$\begin{aligned}a_{11}^2 + a_{21}^2 &= 1,\\ a_{12}^2 + a_{22}^2 &= 1,\\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} &= 0,\end{aligned} \tag{29}$$

které lze stručně vyjádřit rovností

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{30}$$

Odpověď na výše uvedenou otázku je tedy taková, že **rovnice** (21) **je rovnicí shodnosti, právě když platí**

$$A^T \cdot A = E, \tag{31}$$

kde E je jednotková matice. Matici A, která splňuje vztah (31), nazýváme *ortonormální* maticí. Stručně proto můžeme konstatovat, že afinita daná rovnicí (21) je shodností právě tehdy, když je matice A *ortonormální*.

Poznámky.

1. Platí $A^T \cdot A = E$. Potom je ale $A^T = A^{-1}$ a platí tedy i rovnost $A \cdot A^T = E$.

2. Zobrazení, pro která platí $|\det A| = 1$ nazýváme ekviafinní zobrazení, stručně **ekviafinity**. Je zřejmé, že každá shodnost je ekviafinita. Platí toto tvrzení i obráceně? Můžeme říci, že každá ekviafinita je shodností?

3. Je třeba si uvědomit, že při shodném zobrazení mezi euklidovskými prostory různých dimenzí není matice A čtvercová. Potom výše uvedené úvahy o inverzní matici nemají smysl a v platnosti zůstává pouze původní podmínka $A^T \cdot A = E$.

PŘÍKLAD 5.3. *Zapsáním formou rovnic ve tvaru* (21) *uveďte alespoň tři příklady ekviafinity, která není shodností.*

PŘÍKLAD 5.4. *Rozhodněte, zda je afinita daná rovnicemi* $x' = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + 8$, $y' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 6$ *shodností.*

PŘÍKLAD 5.5. *Určete parametr s tak, aby existovala shodnost roviny zobrazující body* $[0,0]$, $[3,4]$ *po řadě na body* $[5,0]$, $[9,s]$. *Napište rovnice tohoto zobrazení a souřadnice obrazu bodu* $[5,0]$.

PŘÍKLAD 5.6. *Určete a, b, c tak, aby rovnice* $x' = \dfrac{3}{4}x + by + 1, \quad y' = ax + cy - 1$ *vyjadřovaly shodnost.*

PŘÍKLAD 5.7. *Určete koeficienty a, b, c tak, aby bylo uvedenými rovnicemi dáno shodné zobrazení:*

a) $x' = ax + by + 1$, $y' = cx + \dfrac{1}{2}y - 1$.

b) $x' = x + by - 2$, $y' = ax + cy + 1$.

PŘÍKLAD 5.8. *Určete p, q tak, aby existovala shodnost zobrazující body* $[3,0]$, $[1,2]$, $[-1,-1]$ *po řadě na body* $[1,4]$, $[p,2]$, $[2,q]$. *Najděte samodružné body a směry tohoto zobrazení.*

5.2 Samodružné body a směry shodností v rovině

Ze základní a střední školy si určitě pamatujete většinu ze shodností v rovině. Jsou to *identita*, *osová souměrnost*, *středová souměrnost*, *otočení*, *posunutí* a *posunuté zrcadlení*. Víte, že střed středové souměrnosti, případně střed otočení, se zobrazí sám na sebe. Také bezesporu víte, že ve středové souměrnosti, případně v posunutí, se přímka zobrazí na přímku s ní rovnoběžnou. Jedná se o vlastnosti, které se popisují pomocí pojmů *samodružný bod* a *samodružný směr*.

Samodružným bodem (afinního) zobrazení rozumíme bod, který se zobrazí sám na sebe, tj. pro jeho souřadnice platí $X' = X$.

Pokud do rovnic (21) dosadíme $x' = x$ a $y' = y$ je zřejmé, že souřadnice samodružných bodů daného zobrazení jsou řešením soustavy rovnic

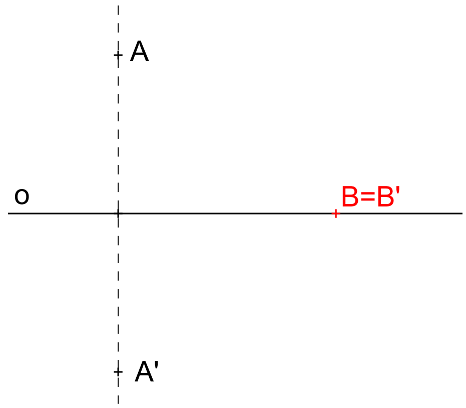
$$\begin{array}{rcl} (1-a_{11})x_1 - a_{12}x_2 & = & b_1 \\ -a_{21}x_1 + (1-a_{22})x_2 & = & b_2. \end{array} \tag{32}$$

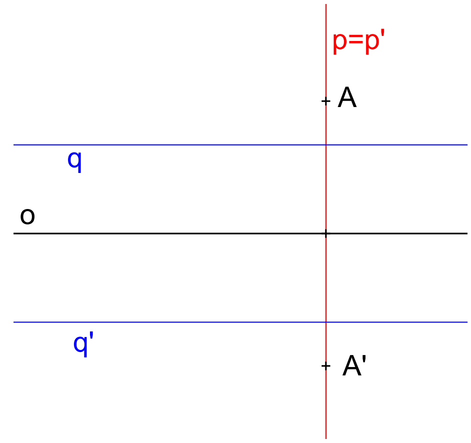
Samodružným směrem rozumíme směr, který se v (afinním) zobrazení zobrazí sám na sebe.

Pro vyjádření směru používáme vektor, např. $\vec{u}$. Příslušný „směr“ potom reprezentují všechny jeho násobky $\lambda\vec{u}$, kde $\lambda \in \mathbb{R}$. Má-li tedy být směr reprezentovaný vektorem $\vec{u}$ samodružný, musí pro vektor $\vec{u}'$, který je obrazem vektoru $\vec{u}$, platit, že reprezentuje stejný směr, tj. $\vec{u}' = \lambda\vec{u}$, kde $\lambda \in \mathbb{R}$. Jak je uvedeno výše, samodružné body vypočítáme řešením soustavy 32. Abychom dokázali vypočítat i samodružné směry, musíme si nejprve zavést pojem *asociovaný homomorfismus*, viz str. 30. Tomu se budeme věnovat až v další kapitole, kde se na detailní výpočet samodružných bodů a směrů zaměříme.

Pro každou shodnost v rovině je typická kombinace samodružných bodů a směrů. Je to jakýsi její unikátní identifikátor. Jako příklad si uveďme osovou souměrnost $\mathcal{O}(o)$, viz Obr. 22. Ta má nekonečně mnoho samodružných bodů, které tvoří osu o souměrnosti, viz např. bod B na Obr. 22, vlevo. Samodružné směry má potom dva, kolmý na osu osové souměrnosti a rovnoběžný s osou osové souměrnosti, viz přímky p, q a jejich obrazy.

Na Obr. 22 také můžeme pozorovat rozdíl mezi pojmy *přímka samodružných bodů* a *samodružná přímka*. Přímkou samodružných bodů je osa o osové souměrnosti, každý její bod je totiž samodružný. Samodružnou přímkou je potom přímka p, která se zobrazuje sama na sebe, kromě průsečíku s osou o ale nemá žádný další samodružný bod. Všechny její ostatní body se zobrazují jako bod A, do jiného bodu, ale opět ležícího na přímce p, viz obraz A'.





Obrázek 22: Samodružným bodem je každý bod osy osové souměrnosti (osa souměrnosti je tzv. přímkou samodružných bodů). Samodružné směry osové souměrnosti jsou dva, kolmý na osu souměrnosti a rovnoběžný s osou souměrnosti.

PŘÍKLAD 5.9. *Vyplňte následující tabulku samodružných bodů a směrů pro všechny shodnosti v rovině. U každého zobrazení uvádějte počty samodružných bodů a směrů (je-li směrů více, tak jejich vzájemné odchylky).*

shodnost	*samodružné body*	*samodružné směry*
identita		
osová souměrnost		
středová souměrnost		
otočení		
posunutí		
posunuté zrcadlení		