

6 Skládání shodností v rovině

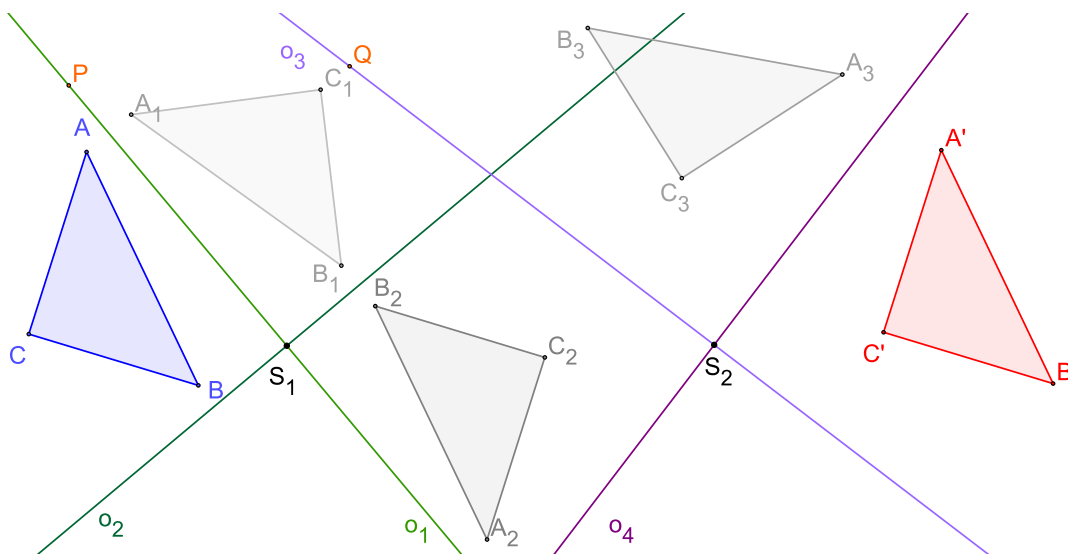
Skládáním zobrazení jsme se začali zabývat v souvislosti se shodnostmi v rovině, konkrétně vlastností, která říká, že *každou shodnost v rovině lze složit z nejvýše tří osových souměrností* (viz věta 5 na str. 62).

Skládání zobrazení jsme proto definovali již v kapitole 5.8.1 (definice 20). V kapitolách po ní následujících jsme pak zkoumali situace, ve kterých složením osových souměrností získáme konkrétní shodnosti.

Zde své seznamování se skládáním shodností završíme tím, že na operaci skládání a na množinu shodností budeme nahlížet jako na algebraickou strukturu. Prostřednictvím řešení několika příkladů budeme zkoumat vlastnosti vybraných podmnožin množiny shodností v rovině. Uvedeme si též dlouho slibovanou souvislost skládání zobrazení s násobením matic.

PŘÍKLAD 6.1. V Eukleidovském prostoru E_2 jsou dány dvě středové souměrnosti \mathcal{S}_1 a \mathcal{S}_2 . Určete zobrazení $Z_1 = \mathcal{S}_2 \cdot \mathcal{S}_1$ a $Z_2 = \mathcal{S}_1 \cdot \mathcal{S}_2$.

Řešení: Pro detailní průzkum výsledků skládání dvou středových souměrností použijte applet <https://www.geogebra.org/m/kenjwuy>. Složením středové souměrnosti \mathcal{S}_1 se středem S_1 a středové souměrnosti \mathcal{S}_2 se středem $S_2 \neq S_1$ vznikne posunutí \mathcal{T} , viz Obr. 75. Je-li $S_1 \equiv S_2$ je $\mathcal{S}_2\mathcal{S}_1$ identita.



Obrázek 75: Skládání dvou středových souměrností $\mathcal{S}_2(S_2) \circ \mathcal{S}_1(S_1)$

PŘÍKLAD 6.2. Řešením předcházejícího příkladu 6.1 jsme došli k poznatku, že složením dvou středových souměrností s různými středy souměrnosti S_1 a S_2 , $S_2 \neq S_1$, vznikne posunutí \mathcal{T} . Určete velikost a směr tohoto posunutí! Můžete využít applet <https://www.geogebra.org/m/kenjwuy>.

PŘÍKLAD 6.3. *Může v rovině existovat útvar, který má dva středy souměrnosti?*

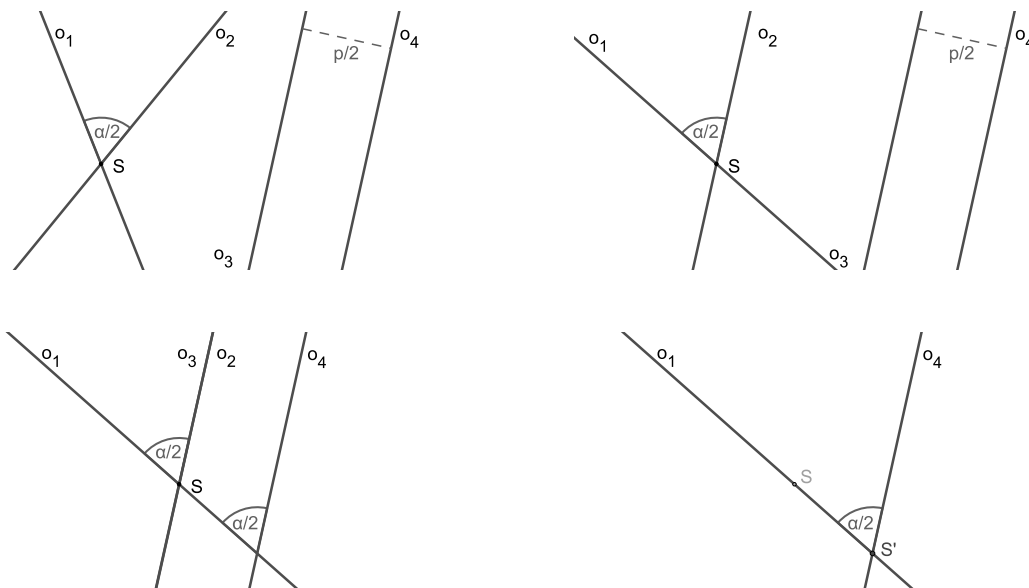
PŘÍKLAD 6.4. *V prostoru E_n je dáno posunutí \mathcal{T} a středová souměrnost \mathcal{S} . Určete zobrazení $\mathcal{Z}_1 = \mathcal{T} \circ \mathcal{S}$ a $\mathcal{Z}_2 = \mathcal{S}\mathcal{T}$.*

Řešení: Využijte applet <https://www.geogebra.org/m/qjhsdabm>. Jeho náhled použijte pro ilustraci svého tvrzení (případně si vytvořte vlastní).

PŘÍKLAD 6.5. *Rozhodněte, jaké zobrazení vznikne složením translace \mathcal{T} a rotace \mathcal{R} , která není středovou souměrností. Uvažujte obě pořadí skládání těchto zobrazení.*

Řešení: Složením (v libovolném pořadí) translace \mathcal{T} a rotace \mathcal{R} , která není středovou souměrností, vznikne rotace téhož smyslu i úhlu jako \mathcal{R} (ovšem ne se stejným středem). Tuto skutečnost si dokážeme opět s využitím toho, že dané shodnosti můžeme rozložit na osové souměrnosti. Využijeme při tom možnost svobodné volby první osy, samozřejmě při zachování určujících charakteristik příslušného zobrazení. V případě otočení můžeme volit první osu libovolného směru, ovšem tak, aby vždy procházela středem otočení S , druhá osa je pak dána jednoznačně, prochází S a s první osou svírá úhel $\alpha/2$, kde α je úhel otočení, více viz kapitola 5.10.1. V případě posunutí zase můžeme volit první osu libovolně, ovšem tak, aby byla kolmá na směr posunutí, druhá osa je s ní potom rovnoběžná ve vzdálenosti $p/2$, kde p je velikost posunutí, více viz kapitola 5.12.1.

Postupujeme dle Obr. 76. Otočení $\mathcal{R}(S, \alpha)$ je dáno dvěma různoběžnými osami o_1 ,



Obrázek 76: $\mathcal{T}(\vec{p}) \circ \mathcal{R}(S, \alpha)$

o_2 , procházejícími bodem S a svírajícími úhel $\alpha/2$. Posunutí $\mathcal{T}(\vec{p})$ je potom dáno

dvěma rovnoběžnými osami o_3 a o_4 , kolmými na směr \vec{p} a vzdálenými od sebe $p/2$, viz Obr. 76, vlevo nahoře. S cílem získat zobrazení, které vznikne složením těchto dvou (víme, že může být tvořeno maximálně třemi osami), budeme nyní tato zobrazení rozkládat na osové souměrnosti s jinak, pro nás vhodněji, orientovanými osami.

Začneme tím, že otočení $\mathcal{R}(S, \alpha)$ rozložíme na osové souměrnosti s osami o_1, o_2 (asi bych měl pro tyto osy používat jiná označení, když se jedná o nové přímky, ale čtenář mi jistě promine toto zjednodušení) tak, aby $o_2 \parallel o_3$, viz Obr. 76, vpravo nahoře.

Nyní navážeme změnou reprezentace posunutí $\mathcal{T}(\vec{p})$. Osu o_3 volíme tak, aby byla totožná s o_2 , tj. $o_3 \equiv o_2$. Nová osa o_4 je s ní pochopitelně rovnoběžná ve vzdálenosti $p/2$, viz Obr. 76, vlevo dole. Zdůrazněme, že v důsledku rovnoběžnosti s o_3 svírá i osa o_4 s o_1 úhel $\alpha/2$.

Jak víme z kapitoly 5.16, složením dvou osových souměrností s totožnými osami (tj. složením osové souměrnosti sama se sebou) vznikne identita \mathcal{I} . Protože *identita je neutrálním prvkem vzhledem k operaci skládání zobrazení* (stejně jako 0 vzhledem k sčítání, nebo 1 vzhledem k násobení), můžeme při skládání její přítomnost potlačit (stejně jako $a+0 = a$ nebo $1 \cdot a = a$). Totožné osy o_2, o_3 proto z obrázku „odstraníme“. Zůstanou tam jenom osy o_1 a o_4 svírající úhel $\alpha/2$ ve stejném smyslu jako tomu bylo u o_1 a o_2 , ale, pozor, procházející jiným společným bodem S' , viz Obr. 76, vpravo dole. Složením osových souměrností s těmito osami tak vznikne rotace $\mathcal{R}(S', \alpha)$. Tím jsme potvrdili správnost tvrzení uvedeného na začátku tohoto řešení.

6.1 Shodnosti přímé a nepřímé vs. skládání zobrazení

Shodnosti rozdělujeme na přímé a nepřímé, viz str. 29. *Přímými shodnostmi jsou identita, středová souměrnost, otočení a posunutí. Nepřímými shodnostmi jsou osová souměrnost a posunutá souměrnost.*

Zajímá nás, jak se vlastnost *přímá/nepřímá shodnost* reprodukuje skládáním zobrazení.

Opět využijeme skutečnost, že shodnosti v rovině lze skládat z osových souměrností. Porovnáme-li výše uvedený přehled přímých a nepřímých shodností s tím, co víme o každé z nich z hlediska jejího skládání z osových souměrností, můžeme říci, že *přímou shodnost lze rozložit na sudý počet osových souměrností, zatímco nepřímou shodnost lze rozložit na lichý počet osových souměrností.*

Z řešení příkladu 6.5 vyplývá, že při skládání většího počtu osových souměrností dokážeme některé z nich vzájemně „anihilovat“, vždy se však musí jednat o dvojici sousedních os, viz osud os o_2 a o_3 v řešení příkladu. Počet skládaných osových

souměrností jsme tedy schopni snižovat výhradně po dvou! Odtud plyne tento závěr: *Složíme-li dvě shodnosti přímé nebo dvě shodnosti nepřímé, dostaneme shodnost přímou; složíme-li shodnost přímou a nepřímou, vznikne shodnost nepřímá.*

PŘÍKLAD 6.6. *Zdůvodněte výše uvedené tvrzení: „Složíme-li dvě shodnosti přímé nebo dvě shodnosti nepřímé, dostaneme shodnost přímou; složíme-li shodnost přímou a nepřímou, vznikne shodnost nepřímá.“*

6.2 Grupa shodností v rovině

Naše dosavadní poznatky získané řešením příkladů věnovaných skládání shodností v rovině nasvědčují tomu, že množina shodností v rovině spolu s operací skládání zobrazení tvoří grupu¹. Některé podmnožiny množiny shodností navíc tvoří spolu s operací skládání zobrazení podgrupy, tj. podmnožiny množiny shodností v rovině, které samy splňují definici grupy.

PŘÍKLAD 6.7. *Vyslovte argumenty potvrzující pravdivost alespoň dvou z následujících čtyř tvrzení:*

- (a) *Všechny shodnosti v rovině tvoří grupu G_S .*
- (b) *Všechny přímé shodnosti tvoří podgrupu G'_S grupy G_S .*
- (c) *Množina všech translací doplněná identitou, tvoří grupu, která je podgrupou grupy přímých shodností.*
- (d) *Množina všech translací a středových souměrností, doplněná identitou, tvoří podgrupu grupy G'_S .*

PŘÍKLAD 6.8. *Je dán rovnostranný trojúhelník ABC . Najděte všechny shodnosti, které převádějí tento trojúhelník do něho samého. Zkoumejte vlastnosti množiny těchto shodností spolu s operací skládání shodností.*

¹Množinu G , v níž je definována operace \circ nazýváme grupou vzhledem k operaci \circ (značíme (G, \circ)), právě když:
a) Výsledek operace \circ je pro každou dvojici prvků G opět prvkem G (říkáme, že operace \circ je na G neomezeně definovaná, nebo, že množina G je uzavřená vzhledem k operaci \circ).
b) Operace \circ je asociativní v množině G .
c) Operace \circ má neutrální prvek $n \in G$.
d) Ke každému prvku $k \in G$ existuje inverzní prvek $k^{-1} \in G$ vzhledem k operaci \circ .
Je-li navíc operace \circ komutativní v množině G , nazýváme algebraickou strukturu (G, \circ) komutativní grupou.
(viz též definice 1 na str. 4)

6.3 Souvislost mezi skládáním afinních zobrazení a násobením matic

V lineární algebře jsme se naučili algoritmus násobení matic, uživatelským způsobem, bez zdůvodnění, proč se tato operace provádí zrovna daným způsobem. Nyní si ukážeme, že postup násobení dvou matic je přirozeným důsledkem skládání afinních zobrazení

$$f : X' = AX + B. \quad (61)$$

Pro zjednodušení budeme uvažovat pouze *lineární zobrazení*, tj. afinní transformace s nulovým vektorem posunutí, v jejichž rovnicích (61) je $B = 0$ (nulová matice)

$$f : X' = AX. \quad (62)$$

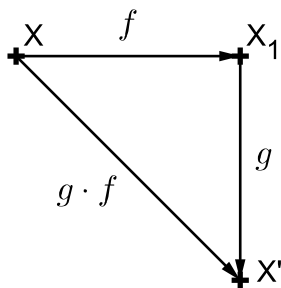
PŘÍKLAD 6.9. Jsou dána lineární zobrazení f, g :

$$f : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad g : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Určete matici M složeného zobrazení

$$g \cdot f : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = M \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Řešení: Uvažujme situaci znázorněnou na Obr. 77. Bod $X[x, y]$ je afinitou f zobrazen



Obrázek 77: Skládání afinit f a g v rovině

na bod $X_1[x_1, y_1]$, ten je pak afinitou g zobrazen na bod $X'[x', y']$. Tuto skutečnost můžeme zapsat rovnicemi

$$X \xrightarrow{f} X_1 : \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}; \quad X_1 \xrightarrow{g} X' : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix},$$

odkud po dosazení za $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ z první rovnice do druhé dostáváme

$$X \xrightarrow{g \cdot f} X' : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (63)$$

Skládání afinit znázorněné Obr. 77 ale můžeme zapsat i pomocí rovnic. Platí

$$X \xrightarrow{f} X_1 : \begin{array}{l} x_1 = ax + by \\ y_1 = cx + dy \end{array}; \quad X_1 \xrightarrow{g} X' : \begin{array}{l} x' = Ax_1 + By_1 \\ y' = Cx_1 + Dy_1 \end{array}.$$

Potom po dosazení za x_1 a y_1 z první soustavy rovnic do druhé dostaneme

$$X \xrightarrow{g \circ f} X' : \begin{array}{l} x' = A(ax + by) + B(cx + dy) = (Aa + Bc)x + (Ab + Bd)y \\ y' = C(ax + by) + D(cx + dy) = (Ca + Dc)x + (Cb + Dd)y \end{array},$$

po přepsání do maticového tvaru

$$X \xrightarrow{g \circ f} X' : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Aa + Bc & Ab + Bd \\ Ca + Dc & Cb + Dd \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (64)$$

Z porovnání (63) a (64) je zřejmé, že pro matici M složené afinity $g \circ f$ platí:

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Aa + Bc & Ab + Bd \\ Ca + Dc & Cb + Dd \end{bmatrix}. \quad (65)$$

Rovnost (65) tak přináší známý algoritmus pro násobení dvou matic.

PŘÍKLAD 6.10. Řešení příkladu 6.9 využijte ke zdůvodnění skutečnosti, že skládání afinit v rovině není komutativní. Zobecněte na E_n .

7 Klasifikace shodností roviny

V kapitolách 5.1–5.4 jsme se zevrubně zabývali algebraickou reprezentací afinít v rovině a podmínkami, kdy se jedná o shodnosti. Věnovali jsme se výpočtům samodružných bodů a směrů shodností a zmínili jsme jejich důležitost pro identifikaci konkrétní shodnosti z jejích rovnic. Zde na toto snažení navážeme, abychom si ukázali překvapivě jednoduchý obecný zápis shodností v rovině, a abychom si následně ukázali, jak lze z rovnic afinity, použitím nástrojů lineární algebry a uplatněním znalostí o samodružných bodech a směrech, získat kompletní přehled shodností v rovině, o kterém hovoříme jako o *úplné klasifikaci shodností v rovině*.

Myšlenka úplné klasifikace shodností

Klasifikace shodností roviny je založena na výpočtu samodružných bodů a směrů zobrazení, které je dáno rovnicí

$$f : X' = A \cdot X + B. \quad (66)$$

Viz též (21) a (22) na straně 25. Postup tohoto výpočtu a způsob identifikace příslušného zobrazení pomocí jeho samodružných bodů a směrů je ilustrován podrobným řešením příkladu 5.11 na stranách 41–45.

Důležitým poselstvím této kapitoly je představení jednoduchého zápisu shodností v rovině ve formě soustavy rovnic, ve kterém jsou již zohledněny podmínky (29) (viz str. 26) za kterých jsou rovnice afinity (3) (viz str. 18) rovnicemi shodností. Toto zjednodušení dostaneme uplatněním známé goniometrické identity $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Každá přímá shodnost je dána rovnicemi ve tvaru

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha + b_1, \\ x'_2 &= x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha + b_2, \end{aligned} \quad (67)$$

zatímco každá nepřímá shodnost je dána rovnicemi

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \cos \alpha + x_2 \sin \alpha + b_1 \\ x'_2 &= x_1 \sin \alpha - x_2 \cos \alpha + b_2. \end{aligned} \quad (68)$$

PŘÍKLAD 7.1. *Vypočítejte determinanty matic transformací daných soustavami (67) a (68). Dejte do souvislosti znaménko tohoto determinantu a otázku, zda se jedná o přímou nebo nepřímou shodnost.*

Klasifikace shodností roviny

Z podmínky $A^T \cdot A = E$ plyne, že afinní zobrazení určené rovnicemi

$$\begin{aligned}x' &= a_{11}x + a_{12}y + b_1 \\y' &= a_{21}x + a_{22}y + b_2,\end{aligned}$$

je shodností právě tehdy, když platí rovnosti

$$\begin{aligned}a_{11}^2 + a_{21}^2 &= a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1 \\a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} &= a_{12}a_{11} + a_{22}a_{21} = 0\end{aligned}$$

Vzhledem k platnosti vztahu $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ je zřejmé, že existuje úhel $\alpha \in \langle 0^\circ; 360^\circ \rangle$ takový, že lze napsat

$$\begin{aligned}a_{11} &= \cos \alpha, \\a_{21} &= \sin \alpha, \\a_{12} \cos \alpha + a_{22} \sin \alpha &= 0, \\a_{22} &= \varepsilon \cos \alpha, \\a_{12} &= -\varepsilon \sin \alpha, \text{ kde } \varepsilon = \pm 1.\end{aligned}$$

Hodnota ε určuje, zda se jedná o shodnost přímkou ($\varepsilon = 1$) nebo nepřímou ($\varepsilon = -1$).

I. Přímé shodnosti

Každou přímou shodnost v rovině můžeme vyjádřit rovnicemi ve tvaru

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha + b_1, \\x'_2 &= x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha + b_2.\end{aligned}$$

Samodružné body

Samodružné body přímé shodnosti jsou řešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned}x_1(1 - \cos \alpha) + x_2 \sin \alpha &= b_1, \\-x_1 \sin \alpha + x_2(1 - \cos \alpha) &= b_2.\end{aligned} \tag{69}$$

Nejprve nás bude zajímat přímá shodnost v rovině, která má právě jeden samodružný bod. Soustava (69) má právě jedno řešení, pokud je regulární, tj. pokud pro její determinant platí

$$\begin{vmatrix} (1 - \cos \alpha), & \sin \alpha \\ -\sin \alpha, & (1 - \cos \alpha) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Po úpravě dostaneme

$$2(1 - \cos \alpha) \neq 0,$$

což vede k podmínce

$$\cos \alpha \neq 1.$$

Tak dostáváme

1) OTOČENÍ (ROTACI).

Stačí volit počátek soustavy souřadné v onom jediném samodružném bodě a dostaneme známé vyjádření otočení kolem počátku o úhel α :

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha, \\x'_2 &= x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha.\end{aligned}$$

Samodružné směry

Samodružné směry (tj. vektory těchto směrů) přímé shodnosti jsou **netriviálním** řešením soustavy homogenních rovnic

$$\begin{aligned}u_1(\lambda - \cos \alpha) + u_2 \sin \alpha &= 0, \\-u_1 \sin \alpha + u_2(\lambda - \cos \alpha) &= 0.\end{aligned}\tag{70}$$

Ta má netriviální (tj. nekonečně mnoho) řešení právě tehdy, když je splněna charakteristická rovnice přímé shodnosti v rovině

$$\begin{vmatrix}(\lambda - \cos \alpha), & \sin \alpha \\ -\sin \alpha, & (\lambda - \cos \alpha)\end{vmatrix} = 0.\tag{71}$$

Úpravou (71) dostaneme rovnici

$$(\lambda - \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha = 0,$$

která je splněna za předpokladu, že $\sin \alpha = 0$ a zároveň $\cos \alpha = \lambda$, kde $\lambda = \pm 1$ ¹.

Pro $\cos \alpha = -1$ dostáváme

2) STŘEDOVOU SOUMĚRNOST

s analytickým vyjádřením

$$\begin{aligned}x'_1 &= -x_1 + b_1, \\x'_2 &= -x_2 + b_2.\end{aligned}$$

¹Pro shodná zobrazení je $|\lambda| = 1$. Jinak by vektor \vec{u} samodružného směru v zobrazení $\varphi(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$ nezachoval svou velikost.

Je-li $\cos \alpha = 1$, dostaneme pro $b_1 = b_2 = 0$,

3) IDENTITU

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 \\x'_2 &= x_2\end{aligned}$$

a pro $b_1 \neq 0 \vee b_2 \neq 0$

4) POSUNUTÍ

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 + b_1 \\x'_2 &= x_2 + b_2.\end{aligned}$$

II. Nepřímé shodnosti

Každou nepřímou shodnost v rovině můžeme vyjádřit rovnicemi ve tvaru

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 \cos \alpha + x_2 \sin \alpha + b_1 \\x'_2 &= x_1 \sin \alpha - x_2 \cos \alpha + b_2.\end{aligned}$$

Samodružné směry

K vyšetření nepřímých shodností použijeme samodružné směry. Řešením charakteristické rovnice

$$\begin{vmatrix} (\lambda - \cos \alpha) & -\sin \alpha \\ -\sin \alpha & (\lambda + \cos \alpha) \end{vmatrix} = 0, \quad (72)$$

dostaneme podmínku

$$\lambda = \pm 1,$$

která odpovídá tomu, že uvažované zobrazení má dva navzájem kolmé samodružné směry. Jeden, pro $\lambda = 1$, se zachovává, druhý, pro $\lambda = -1$, se mění v opačný. Volme soustavu souřadnou tak, aby osa x měla směr odpovídající $\lambda = 1$. Směr osy y pak zřejmě odpovídá $\lambda = -1$. Potom je nepřímá shodnost popsána rovnicemi

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 + b_1 \\x'_2 &= -x_2 + b_2.\end{aligned}$$

Pokud je $b_1 = 0$, má uvažované zobrazení **přímku samodružných bodů** a jedná se tedy o

5) OSOVOU SOUMĚRNOST

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 \\x'_2 &= -x_2 + b_2.\end{aligned}$$

Pokud je ale $b_1 \neq 0$, má pouze **samodružnou přímku** a jedná se o

6) POSUNUTÉ ZRCADLENÍ.