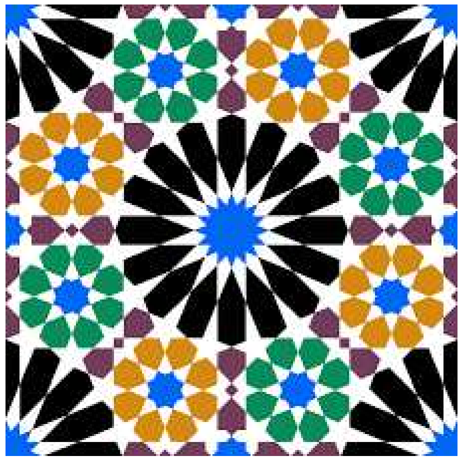
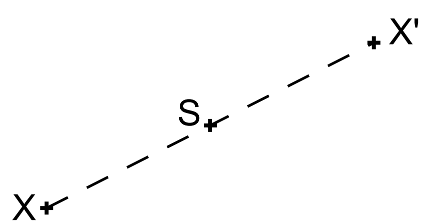
5.8 Středová souměrnost

Středová souměrnost je určena bodem, kterému říkáme *střed souměrnosti*. Středovou souměrnost se středem S značíme $\mathcal{S}(S)$. Jedná se o *přímou shodnost*. Střed S je jejím jediným *samodružným bodem*. Středová souměrnost je *involutorním zobrazením* (*involucí*), viz str. 49.



Obrázek 39: Středová symetrie; Alhambra, kachel (`https://openclipart.org/detail/224123/alhambra-til`

Definice 19. Středová souměrnost *se středem S je shodné zobrazení, které bodu S přiřazuje týž bod S (jedná se o samodružný bod) a libovolnému bodu $X \neq S$ přiřazuje bod X' tak, že bod S je středem úsečky XX'. Zobrazení značíme $\mathcal{S}(S)$.*

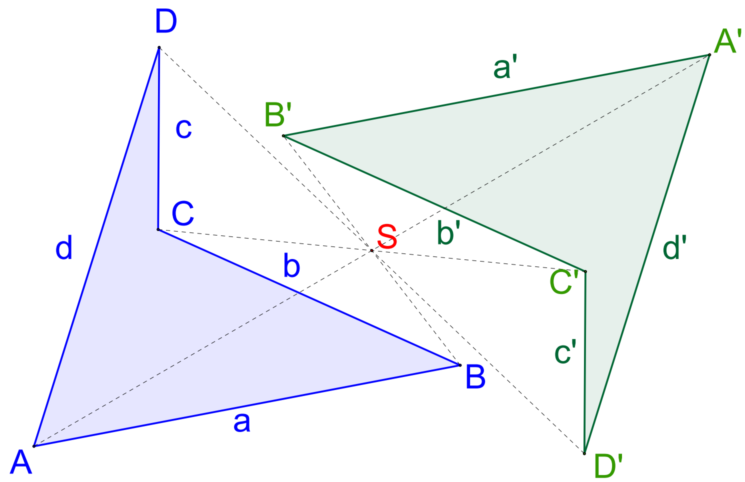


Obrázek 40: Středová souměrnost $\mathcal{S}(S)$

Poznámka. Středová souměrnost je jednoznačně určena svým středem. Můžeme ji chápat též jako speciální případ otočení (rotace) $\mathcal{R}(S, \alpha)$ pro $\alpha = 180°$, tj. $\mathcal{S}(S) = \mathcal{R}(S, 180°)$. Otočení je věnována kapitola 5.10, viz str. 64.

Samodružné body, přímky a směry středové souměrnosti

Středová souměrnost má *jediný samodružný bod*, střed S. Samodružné jsou v ní *všechny směry*, tj. obrazem každé přímky je přímka s ní rovnoběžná, viz Obr. 41. *Samodružnou přímkou* středové souměrnosti, tj. přímkou, která se zobrazuje sama na sebe, je každá přímka, která prochází středem S.



Obrázek 41: Čtyřúhelník $ABCD$ a jeho obraz $A'B'C'D'$ ve středové souměrnosti $\mathcal{S}(S)$

Analytické vyjádření středové souměrnosti S(S) v rovině

Hledáme rovnice, které popisují vztah souřadnic obrazu $X'[x', y']$ k souřadnicím vzoru $X[x, y]$ ve středové souměrnosti se středem $S[s_1, s_2]$. K rychlému nalezení těchto rovnic postačí zvolit správný úhel pohledu. Příslušnou konfiguraci těchto bodů, viz např. Obr. 40, totiž můžeme chápat tak, že S je středem úsečky XX'. Potom ale $S = \frac{X + X'}{2}$[12], po úpravě a po dosazení souřadnic dostáváme postupně

$$X' = -X + 2S, \tag{46}$$

$$[x', y'] = -[x, y] + 2[s_1, s_2]. \tag{47}$$

Po rozepsání po složkách tak získáme požadované rovnice analytického vyjádření středové souměrnosti $\mathcal{S}(S)$ se středem $S[s_1, s_2]$:

$$\begin{aligned} x' &= -x + 2s_1, \\ y' &= -y + 2s_2. \end{aligned} \tag{48}$$

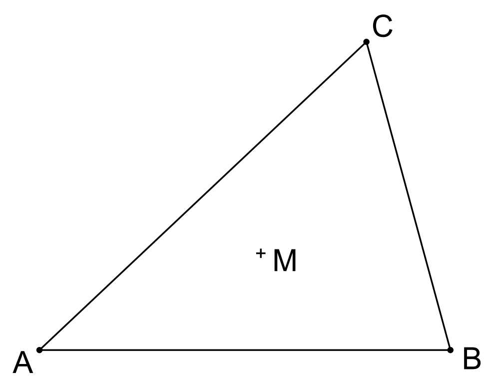
[12]Ke stejnému výsledku se dostaneme použitím vektorů, bez znalosti vztahu pro výpočet souřadnic středu úsečky (vlastně si ho pomocí vektorů odvodíme). Vyjdeme z Obr. 40. Uvažujme vektory $\vec{u} = X' - X$ a $\vec{v} = S - X$. Potom je zřejmé, že $\vec{u} = 2\vec{v}$, tj. $X' - X = 2(S - X)$, po úpravě $X' - X = 2S - 2X$ a nakonec $X' + X = 2S$. Z posledního vztahu již jasně plyne, že $S = \frac{X + X'}{2}$.

PŘÍKLAD 5.20. *Určete rovnice středové souměrnosti* $\mathcal{S}(R)$ *pro* $R\left[-2, \frac{3}{4}\right]$.

Řešení: Do rovnic (48) dosadíme za s_1, s_2 v daném pořadí souřadnice $-2, \frac{3}{4}$ bodu R:

$$\begin{aligned} x' &= -x - 4, \\ y' &= -y + \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

PŘÍKLAD 5.21. *Je dán trojúhelník* ABC *a jeho vnitřní bod* M*, viz Obr. 42. Sestrojte všechny úsečky* XY *se středem* M *a s krajními body* X, Y *na hranici trojúhelníku.*

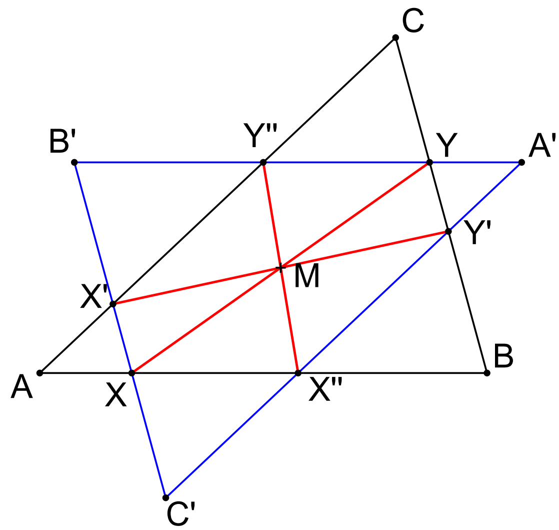


Obrázek 42: Zadání příkladu 5.21

Řešení: Viz Obr. 43. Úsečku, jejíž krajní body leží na hranici trojúhelníku, nazýváme *příčkou trojúhelníku*[13]. Má-li být bod M středem hledané příčky XY, jsou body X a Y ve vztahu vzor–obraz středové souměrnosti $\mathcal{S}(M)$. Jednou z vlastností afinních zobrazení je *zachování incidence*[14]. Pokud bod X, jako jeden z krajních bodů hledané příčky, náleží hranici trojúhelníku ΔABC, potom bod Y, jako druhý krajní bod té příčky a zároveň obraz bodu X ve středové souměrnosti $\mathcal{S}(M)$, náleží hranici trojúhelníku $\Delta A'B'C'$, který je obrazem ΔABC. Zároveň však bod Y jako druhý krajní bod hledané příčky náleží i hranici ΔABC. Patří tedy průniku hranic trojúhelníků ΔABC a $\Delta A'B'C'$. Postup řešení je tak zřejmý z Obr. 43. Trojúhelník ΔABC zobrazíme v $\mathcal{S}(M)$ na trojúhelník $\Delta A'B'C'$. Krajní body hledaných příček pak náleží průniku hranic těchto dvou trojúhelníků. Vidíme, že pro danou polohu bodu M má úloha tři řešení. Může mít pro jiné polohy M jiné počty řešení?

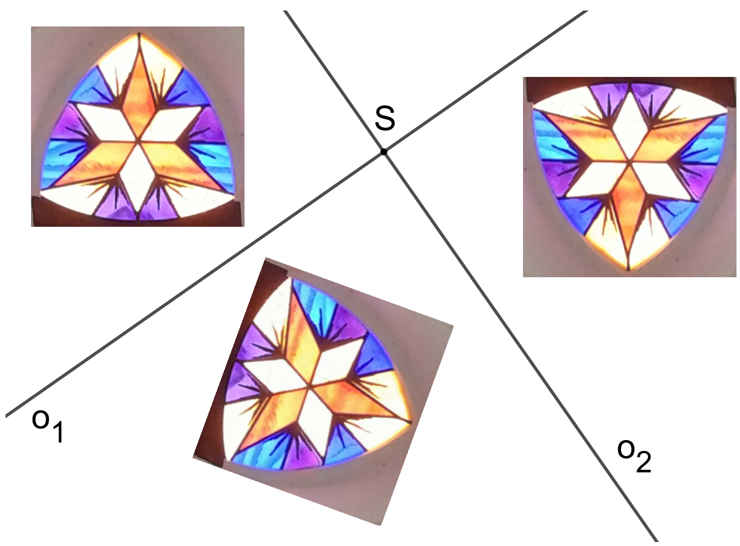
[13] Známe např. *střední příčky* trojúhelníku, které spojují středy jeho stran.

[14] Pojem *incidence* můžeme přeložit jako *náležení*. Potom zachování incidence v nějakém zobrazení znamená, že



Obrázek 43: Řešení příkladu 5.21

Nyní se budeme věnovat souvislosti středové souměrnosti s osovou souměrností. Podívejme se na Obr. 44. Vidíme na něm obrázek vitrážového okna[15] ve třech polohách



Obrázek 44: Složení dvou osových souměrností s kolmými osami

vůči dvěma na sebe kolmým osám o_1 a o_2. Dvě dvojice oken jsou postupně ve vztahu vzor a obraz v osových souměrnostech podle os o_1 a o_2 (jdeme-li v kladném smyslu, tj. proti směru pohybu hodinových ručiček, můžeme říci, že první okno se zobrazí na druhé v $\mathcal{O}(o_1)$ a druhé okno na třetí v $\mathcal{O}(o_2)$), jedna dvojice je pak ve vztahu vzor a obraz ve středové souměrnosti podle středu S, průsečíku uvedených os (jedná se o první a třetí okno, tj. první okno se zobrazí v $\mathcal{S}(S)$ na třetí okno). Jedná se

pokud nějaký bod náleží určitému útvaru, např. bod X náleží úsečce AB, potom obraz tohoto bodu náleží obrazu toho obrazce, obojí v tom předmětném zobrazení, tj. v našem příkladě bod X' jako obraz bodu X náleží úsečce $A'B'$, která je obrazem úsečky AB.

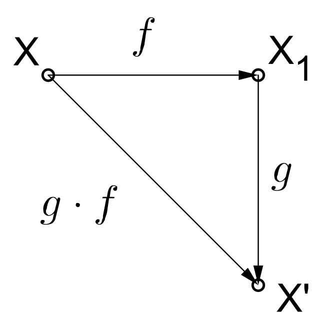
[15] Kostel sv. Jana Nepomuckého, Zelená hora u Žďáru nad Sázavou

o ilustraci toho, že středová souměrnost se dá „vytvořit“ složením dvou osových souměrností se vzájemně kolmými osami.

5.8.1 Skládání zobrazení

Abychom završili své zkoumání věnované skládání osových souměrností v souladu s metodou budování matematické teorie, musíme si řádně definovat operaci *skládání zobrazení*. Zde se zabýváme konkrétně skládáním *geometrických zobrazení*, z matematické analýzy ale známe i skládání funkcí.

Definice 20 (Skládání zobrazení). *Nechť f, g jsou dvě zobrazení, viz Obr. 45. Jestliže bod X_1 je obrazem bodu X v zobrazení f (tj. $X_1 = f(X)$) a bod X' je obrazem bodu X_1 v zobrazení g (tj. $X' = g(X_1)$), potom je každému bodu X přiřazen bod $X' = g(f(X))$. Tím je definováno zobrazení h přiřazující bodu X bod $X' = g(f(X))$ o kterém říkáme, že vzniklo složením zobrazení f a g. Zapisujeme $h = g \cdot f$, $h = gf$, $h = g \circ f$ nebo $h = g(f(X))$.*

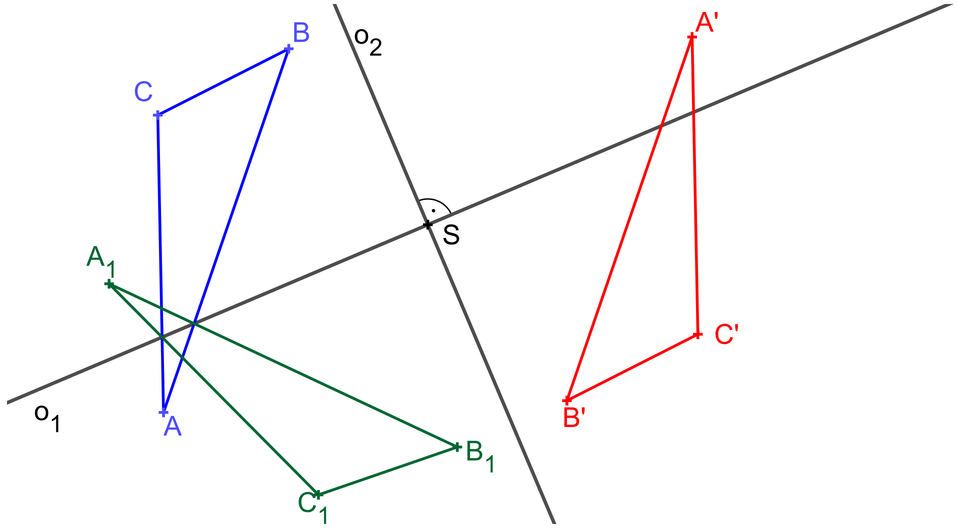


Obrázek 45: Skládání zobrazení f a g

5.8.2 Středová souměrnost jako složené zobrazení

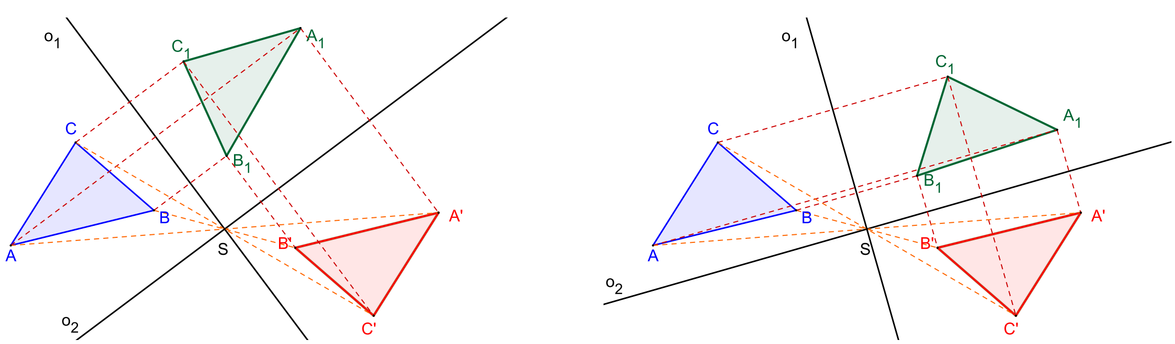
To, co můžeme pozorovat na konkrétních příkladech, viz Obr.45 a 46, nyní zformulujeme jako obecnou vlastnost středové souměrnosti.

Obsah definice 20 je ilustrován Obr. 46, analogií obrázku s okny, která jsou tentokrát nahrazena trojúhelníky. Opět se tedy jedná o skládání dvou osových souměrností se vzájemně kolmými osami. Zobrazení f je reprezentováno osovou souměrností $\mathcal{O}(o_1)$, zobrazení g je reprezentováno osovou souměrností $\mathcal{O}(o_2)$ a jejich složením $g \circ f$ je potom středová souměrnost $\mathcal{S}(S)$.



Obrázek 46: $f : \Delta ABC \to \Delta A_1B_1C_1$, $g : \Delta A_1B_1C_1 \to \Delta A'B'C'$, $g \circ f : \Delta ABC \to \Delta A'B'C'$

Můžeme říci, že každá *středová souměrnost* vznikne *složením* libovolných dvou osových souměrností, jejichž osy jsou k sobě kolmé. Střed souměrnosti S odpovídá průsečíku těchto os. A naopak, středovou souměrnost lze *rozložit* na dvě osové souměrnosti, jejichž osy jsou navzájem kolmé a procházejí středem souměrnosti S. Přitom jedna z os (první, kterou budeme rýsovat) je volitelná, druhá je potom na ní kolmá v bodě, který je středem dané středové souměrnosti. Na Obr. 47 (interaktivní varianta je dostupná na adrese https://www.geogebra.org/m/hekv2tye) vidíme jednu středovou souměrnost $\mathcal{S}(S)$, ve které se ΔABC zobrazuje na $\Delta A'B'C'$, rozloženou na dvě osové souměrnosti dvěma různými způsoby. Jediné, co je třeba při takovém rozkladu dodržet je to, aby osy procházely středem S a byly na sebe kolmé.



Obrázek 47: Rozklad středové souměrnosti $\mathcal{S}(S)$ je dán pouze polohou S a kolmostí os

Jak se budeme seznamovat s dalšími shodnostmi v rovině, ukážeme si, že každá z nich se dá složit z osových souměrností. O tom, kolik jich k tomu nejvýše potřebujeme, hovoří následující věta 5. K jejímu důkazu se vrátíme později.

Věta 5. *Každá shodnost v rovině se dá složit z nejvýše tří osových souměrností.*

5.9 Cvičení: Středová souměrnost

1. Napište rovnice středové souměrnosti v rovině se středem $S[-3, 4]$.

2. Je dána kružnice $k(S, r)$. Bodem P, který leží vně kružnice k, veďte přímku p, která protíná kružnici v bodech A, B tak, že A je středem úsečky BP.

3. Je dán úhel AVB a bod S jeho vnitřku. Sestrojte na rameni VA bod X a na rameni VB bod Y tak, aby bod S byl středem úsečky XY.

4. Je dána úsečka AA_1 ($|AA_1| = 5cm$). Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, pro které je AA_1 těžnicí t_a a pro které platí: $c = 4cm, b = 7cm$.

5. Je dána úsečka AA_1 ($|AA_1| = 5cm$). Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, pro které je AA_1 těžnicí t_a a pro které platí: $\gamma = 45°, \beta = 60°$.

6. Jsou dány dvě kružnice k_1, k_2, které se protínají ve dvou bodech Q a R. Bodem Q veďte přímku, která vytíná na obou kružnicích tětivy stejné délky.

Středová souměrnost – Příklady pro dobrovolné řešení

7. Napište rovnice shodnosti roviny E_2, která vznikne složením tří osových souměrností s osami o rovnicích: $x = 0,\ y = 0,\ x - 2y = 0$.

8. Je dána kružnice $k(O; r)$ a přímka p, která má od středu O vzdálenost $v > 0$; dále je dán bod S, který leží uvnitř poloroviny pO. Sestrojte úsečku se středem S, která má krajní body K, P po řadě na kružnici k a na přímce p.

9. Je dán trojúhelník ABC a jeho vnitřní bod M. Sestrojte všechny úsečky XY se středem M a s krajními body X, Y na hranici trojúhelníku.

10. Vepište danému rovnoběžníku $ABCD$ čtverec $XYUV$ tak, aby na každé straně rovnoběžníku ležel jeden vrchol čtverce.

11. Je dán úhel AVB a bod S jeho vnitřku. Sestrojte na rameni VA bod X a na rameni VB bod Y tak, aby XYS byl rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník s přeponou XY.

12. Je dána úsečka AA_1; $|AA_1| = 4.5cm$. Sestrojte všechny pravoúhlé trojúhelníky ABC s pravým úhlem při vrcholu C, v nichž AA_1 je těžnicí t_a a $t_b = 6cm$.

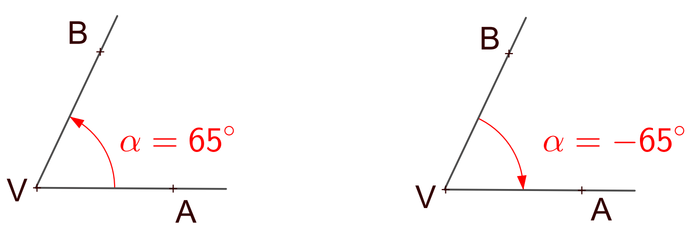
5.10 Otočení

Otočení (též *rotace*) je určeno bodem, *středem otočení*, a orientovaným úhlem, *úhlem otočení*. Otočení se středem S a úhlem α značíme $\mathcal{R}(S, \alpha)$. Jedná se o *přímou shodnost*. Střed S je jejím jediným *samodružným bodem*. *Samodružné směry* nemá. Středová souměrnost není *involutorním zobrazením*, viz str. 49.

Obrázek 48: Rotační symetrie

Orientovaný úhel

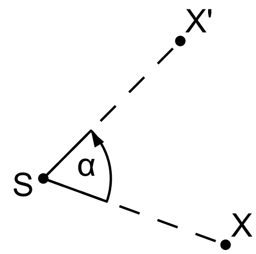
V definici otočení pracujeme s pojmem *orientovaný úhel*. Jedná se o úhel, který není dán jenom svou velikostí, ale také smyslem nanášení, zda *proti* nebo *ve směru pohybu hodinových ručiček*. Z praxe, konkrétně právě ve spojení s otáčením, víme, že tato informace je důležitá, že záleží, v jakém smyslu otáčíme žárovkou, vrutem, dveřmi apod. Orientaci úhlu rozlišujeme znaménkem, otáčení proti směru *pohybu hodinových ručiček* přisuzujeme *kladné znaménko* (+), otáčení ve směru *pohybu hodinových ručiček* přisuzujeme *záporné znaménko* (−). U orientovaného úhlu rozlišujeme mezi *prvním* a *druhým* ramenem. Úhel nanášíme od prvního ramene ve směru daném orientací. Na Obr. 49 vlevo je kladný úhel $\alpha = 65°$, s prvním ramenem $\overrightarrow{VA}$, vpravo potom záporný úhel $\alpha = -65°$, s prvním ramenem $\overrightarrow{VB}$.



Obrázek 49: Orientovaný úhel α

Definice 21. Otočení *neboli* **rotace** *je zobrazení určené středem S a orientovaným úhlem velikosti α, které bodu S přiřazuje týž bod S a libovolnému bodu $X \neq S$ přiřazuje bod X' tak, že $|X'S| = |XS|$ a orientovaný úhel $\angle XSX'$ má velikost α, viz*

Obr. 50. Zobrazení značíme $\mathcal{R}(S, \alpha)$, bod S se nazývá střed otočení a orientovaný úhel velikosti α je úhel otočení.



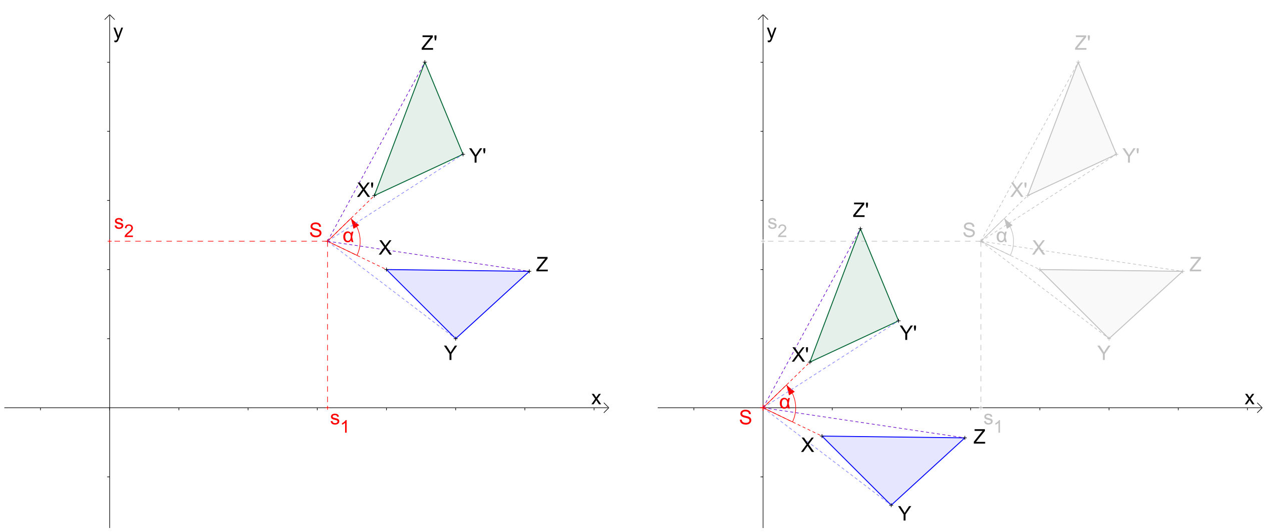
Obrázek 50: Otočení $\mathcal{R}(S, \alpha)$

Samodružné body, přímky a směry otočení

Otočení má *jediný samodružný bod*, střed S. *Samodružné směry* ani *samodružné přímky* nemá.

Analytické vyjádření otočení $\mathbf{R}(S, \alpha)$ v rovině

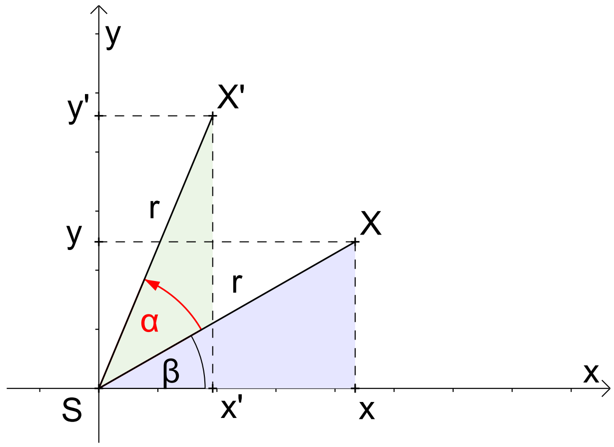
Hledáme vztah mezi souřadnicemi bodu $X[x, y]$ a jeho obrazu $X'[x', y']$ v otočení daném středem $S[s_1, s_2]$ a orientovaným úhlem α, viz Obr. 51. Nejprve se budeme zabývat speciálním případem, kdy je střed otáčení S totožný s počátkem soustavy souřadnice, tj. $S[0, 0]$, který vidíme na Obr. 51 vpravo, potom teprve, s využitím výsledků tohoto jednoduššího případu, odvodíme rovnice otáčení se středem S v obecné poloze, které vidíme na stejném obrázku vlevo.



Obrázek 51: Otočení $\mathcal{R}(S, \alpha)$, vlevo pro $S[s_1, s_2]$, vpravo pro $S[0, 0]$

Rovnice otočení se středem v počátku

Postupujeme podle obrázku 52 (Jak to tak bývá, záměrně volíme pro odvození rovnic ideální konfiguraci bodů v prvním kvadrantu. Nijak tím však nedochází k újmě na obecnosti vztahů, které získáme.). Bod $X[x, y]$ je zobrazen do bodu $X'[x', y']$ v otočení $\mathcal{R}(S[0,0], \alpha)$. Naším cílem je vyjádřit souřadnice obrazu x', y' pomocí souřadnic vzoru x, y. Využijeme k tomu pravoúhlý trojúhelník $\Delta Sx'X'$, na obrázku



Obrázek 52: Otočení $\mathcal{R}([0,0], \alpha) : \; X \longrightarrow X'$

zvýrazněný zelenou barvou. Tento trojúhelník má přeponu SX', jejíž délku označíme r, a odvěsny velikostí x' a y', vnitřní úhel při vrcholu S má velikost $\alpha + \beta$. Platí

$$\begin{aligned} x' &= r\cos(\alpha+\beta), \\ y' &= r\sin(\alpha+\beta). \end{aligned} \tag{49}$$

K úpravě pravých stran rovnic (49) použijeme známé součtové vzorce $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ a $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$. Dostaneme

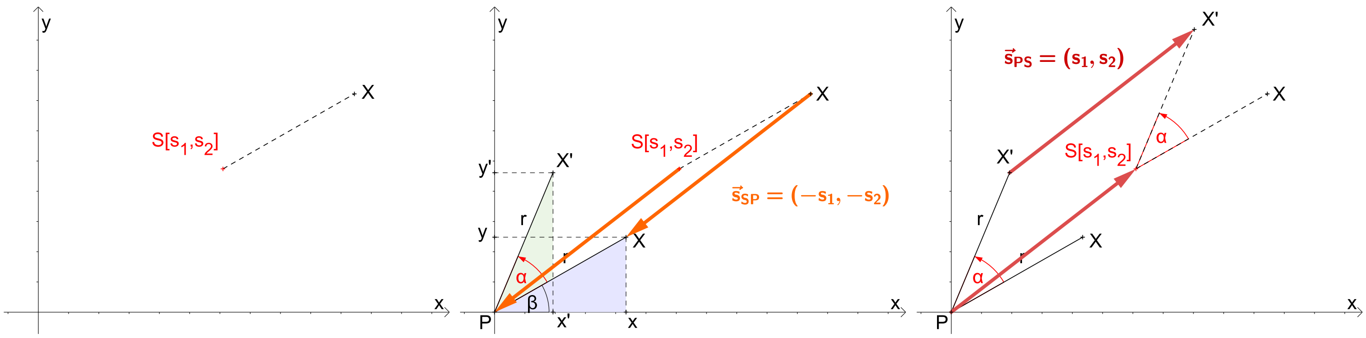
$$\begin{aligned} x' &= r\cos\alpha\cos\beta - r\sin\alpha\sin\beta, \\ y' &= r\sin\alpha\cos\beta + r\cos\alpha\sin\beta. \end{aligned} \tag{50}$$

Nyní si všimneme druhého pravoúhlého trojúhelníku ΔSxX na Obr. 52, vybarveného modře. Jeho přepona SX má rovněž délku r (víme, že $|SX'| = |SX|$), odvěsny mají délky x a y a vnitřní úhel při vrcholu S má velikost β (tento úhel je čistě pomocný, jak uvidíme za chvíli, splní svou roli a zmizí). Pro tento trojúhelník platí $x = r\cos\beta$, $y = r\sin\beta$. Při pozorném prozkoumání rovnic (50) si všimneme, že součiny $r\cos\beta$ a $r\sin\beta$ se vyskytují na jejich pravých stranách. Uplatníme proto získané rovnosti a nahradíme tyto součiny odpovídajícími proměnnými x, y, v uvedeném pořadí. Výsledkem je konečná podoba *rovnic otočení o úhel α kolem počátku*:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha, \\ y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{aligned} \tag{51}$$

Rovnice otočení se středem mimo počátek

Klíčovým úkonem odvození rovnic otočení se středem mimo počátek je převedení tohoto problému na již vyřešený jednodušší problém odvození rovnic otočení se středem v počátku. Postup je naznačen na Obr. 53. Nejprve celou rovinu posuneme



Obrázek 53: Otočení $\mathcal{R}([s_1, s_2], \alpha) : X \longrightarrow X'$

o vektor $\vec{s}_{SP} = (-s_1, -s_2)$, aby se střed otočení dostal do počátku (viz prostřední obrázek). Nově souřadnice středu S jsou proto $[0, 0]$ a nové souřadnice bodu X jsou $[x - s_1, y - s_2]$. Tím jsme úlohu převedli na případ otočení se středem v počátku. Můžeme tak provést otočení bodu X v nové poloze kolem počátku a užitím (51) vyjádřit souřadnice jeho obrazu

$$\begin{aligned} x' &= (x - s_1)\cos\alpha - (y - s_2)\sin\alpha, \\ y' &= (x - s_1)\sin\alpha + (y - s_2)\cos\alpha. \end{aligned} \tag{52}$$

Potom ale musíme rovinu posunout o vektor $\vec{s}_{PS} = (s_1, s_2)$ zpět, aby se střed otáčení dostal do původní polohy (viz pravý krajní obrázek). Souřadnice obrazu se tak zvětší o souřadnice tohoto vektoru. Tím získáváme rovnice *otočení o úhel* α *se středem* $S = [s_1, s_2]$

$$\begin{aligned} x' &= (x - s_1)\cos\alpha - (y - s_2)\sin\alpha + s_1, \\ y' &= (x - s_1)\sin\alpha + (y - s_2)\cos\alpha + s_2, \end{aligned} \tag{53}$$

po úpravě pak ve tvaru

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha + s_1 - s_1\cos\alpha + s_2\sin\alpha, \\ y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha + s_2 - s_1\sin\alpha - s_2\cos\alpha. \end{aligned} \tag{54}$$

PŘÍKLAD 5.22. *Napište rovnice otočení*

a) $\mathcal{R}([0,0], \frac{\pi}{6})$,

b) $\mathcal{R}([2,-3], \frac{\pi}{6})$.

Řešení:

Ad a) Jedná se o otočení kolem počátku, proto dosadíme do (51).

$$x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y$$
$$y' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y.$$

Ad b) Úhel otočení zůstává stejný, ale střed je tentokrát mimo počátek. Dosadíme do (53)

$$x' = (x-2)\frac{\sqrt{3}}{2} - (y+3)\frac{1}{2} + 2,$$
$$y' = (x-2)\frac{1}{2} + (y+3)\frac{\sqrt{3}}{2} - 3.$$

Po úpravě dostáváme výsledné rovnice

$$x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} - \sqrt{3},$$
$$y' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - 4 + \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Pojďme si řešení obou úloh vyjádřit maticově:

$$\mathcal{R}([0,0], \frac{\pi}{6}) : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \tag{55}$$

$$\mathcal{R}([2,-3], \frac{\pi}{6}) : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \sqrt{3} \\ -4 + \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}. \tag{56}$$

Vidíme, že rovnice (55) a (56) se liší pouze přítomností matice (sloupcového vektoru) posunutí u druhé z nich. Obecně můžeme otočení $\mathcal{R}([s_1, s_2], \alpha)$ zapsat maticově takto

$$\mathcal{R}([s_1, s_2], \alpha) : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_1 - s_1\cos\alpha + s_2\sin\alpha \\ s_2 - s_1\sin\alpha - s_2\cos\alpha \end{bmatrix}. \tag{57}$$

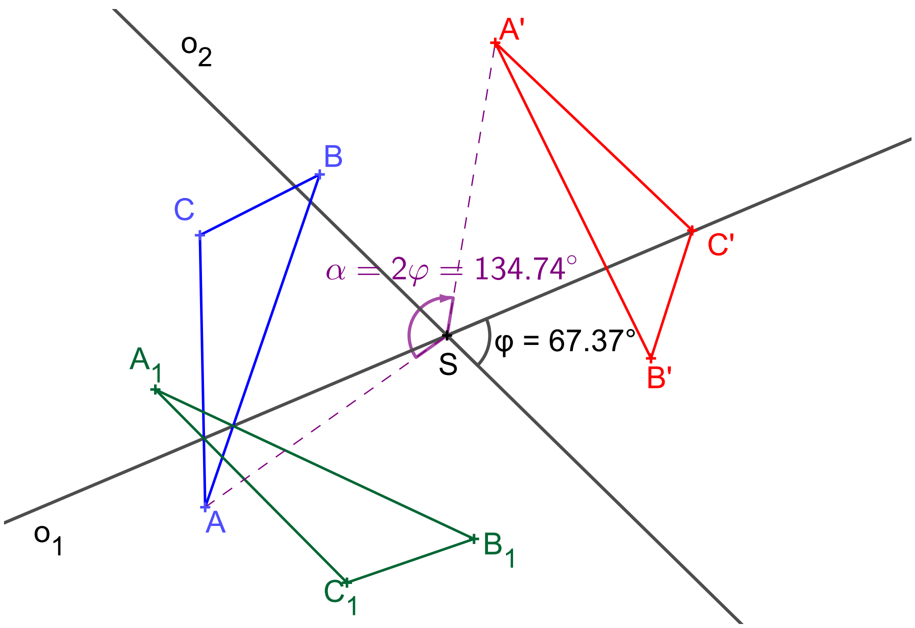
PŘÍKLAD 5.23. *Napište rovnice otočení*

a) $\mathcal{R}([0,0], 60°)$,

b) $\mathcal{R}([3, -\frac{1}{2}], 60°)$.

5.10.1 Otočení jako složené zobrazení

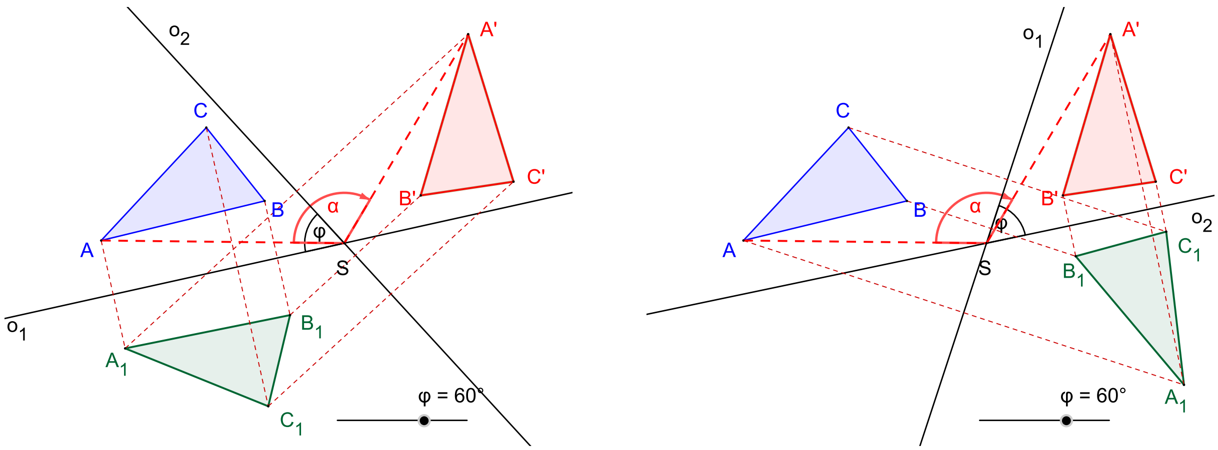
V kapitole 5.8.2 na str. 61 jsme se zabývali složením středové souměrnosti ze dvou osových souměrností s osami vzájemně kolmými. Protože středovou souměrnost můžeme interpretovat také jako otočení kolem středu souměrnosti o 180°, nabízí se otázka, zda i otočení o jiný úhel lze získat složením dvou osových souměrností. Ano, lze. Na Obr. 54 je naznačeno, jak lze složením dvou osových souměrností se společným bodem os S a úhlem mezi nimi φ získat rotaci $\mathcal{R}(S, \alpha = 2\varphi)$.



Obrázek 54: $\mathcal{O}(o_1) : \Delta ABC \to \Delta A_1B_1C_1$, $\mathcal{O}(o_2) : \Delta A_1B_1C_1 \to \Delta A'B'C'$, $\mathcal{R}(S, \alpha) : \Delta ABC \to \Delta A'B'C'$

Složením dvou osových souměrností s různoběžnými osami vznikne otočení, jehož středem je průsečík těchto os a úhlem je dvojnásobek úhlu, který svírají.

A naopak, každé otočení lze složit ze dvou osových souměrností, jejichž osy jsou různoběžky procházející středem otočení. Jednu z těchto os lze volit libovolně tak, že prochází středem otočení. Druhá je touto volbou určena jednoznačně. Na Obr. 55 (interaktivní varianta je dostupná na adrese https://www.geogebra.org/m/sgwnuvjg) vidíme otočení $\mathcal{R}(S, \alpha)$, ve kterém se ΔABC zobrazuje na $\Delta A'B'C'$, rozložené na dvě osové souměrnosti $\mathcal{O}(o_1)$, $\mathcal{O}(o_2)$ dvěma různými způsoby. Jediné, co je třeba při takovém rozkladu dodržet je to, aby osy procházely středem S a úhel φ mezi nimi byl roven $\frac{1}{2}\alpha$.

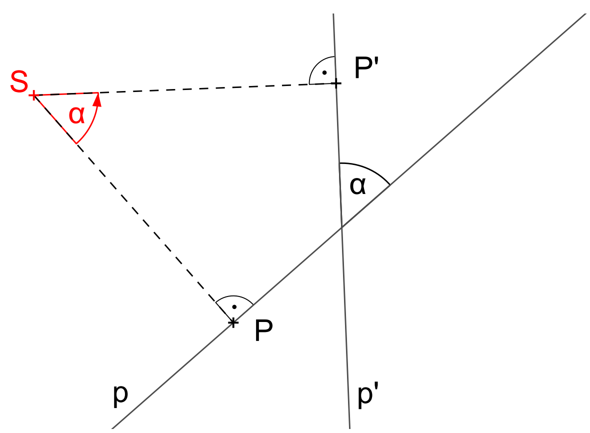


Obrázek 55: Rozklad otočení $\mathcal{R}(S,\alpha)$ je dán pouze polohou S a úhlem os $\varphi = \frac{1}{2}\alpha$

PŘÍKLAD 5.24. *Dokažte následující větu:*

Věta 6. *Otočení se středem S a úhlem velikosti α převádí přímku p v přímku p' různoběžnou s p; přitom dva vrcholové úhly, které p a p' tvoří, mají velikost α.*

Řešení: Vlastnost popisovaná větou 6 je zachycena na Obr. 56. Při řešení úkolu vyjděte z tohoto obrázku.

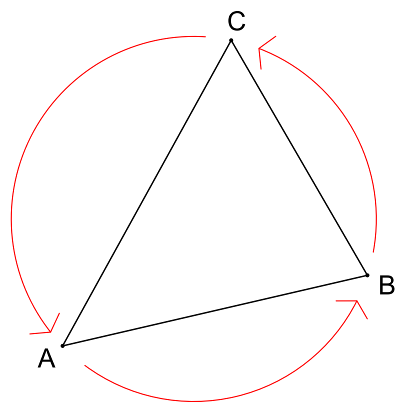


Obrázek 56: Rozklad otočení $\mathcal{R}(S,\alpha)$ je dán pouze polohou S a úhlem os $\varphi = \frac{1}{2}\alpha$

Poznámka. Na Obr. 56 vidíme možný postup při zobrazení přímky p v otočení $\mathcal{R}(S,\alpha)$. Ze středu otočení S spustíme na přímku p kolmici s patou P, tuto patu zobrazíme v daném otočení a jejím obrazem P' vedeme kolmici na úsečku SP'. Tato kolmice p' je obrazem přímky p v daném otočení. Další možný způsob zobrazení přímky je založen na zobrazení jejích dvou libovolných bodů, řekněme A a B. Přímka určená jejich obrazy A', B' je potom obrazem dané přímky.

PŘÍKLAD 5.25. *Afinní zobrazení eukleidovské roviny na sebe zobrazuje vrchol A trojúhelníku ABC na bod B, bod B na bod C a bod C na bod A. Může to být zobrazení shodné? Jestliže ano, napište jeho rovnice vzhledem k vhodně zvolené kartézské soustavě souřadnic.*

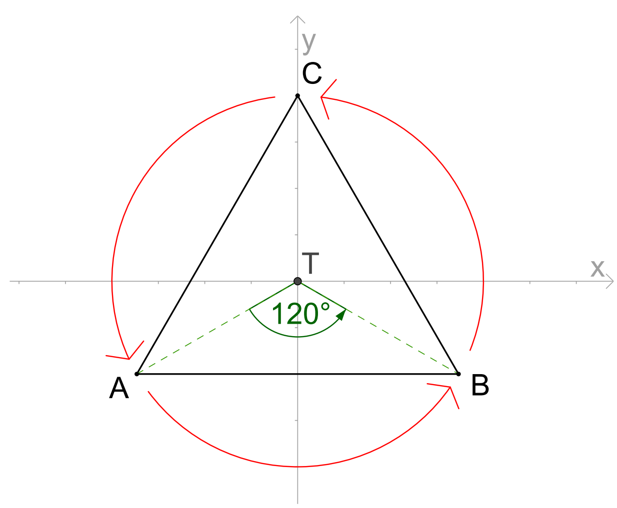
Řešení: Viz Obr. 57. Trojúhelník ΔABC se zobrazuje sám na sebe, vrchol a strana



Obrázek 57: Existuje takové f, že $f: A \longrightarrow B$, $B \longrightarrow C$, $C \longrightarrow A$?

vždy na vrchol a stranu následující. Nemůže se proto měnit jeho tvar. Navíc, aby se mohly sousední strany s různými poměry délek na sebe zobrazovat, zřejmě platí $|AB| = |BC|$, $|BC| = |CA|$, $|CA| = |AB|$.

Trojúhelník ΔABC je proto rovnostranný a hledaným zobrazením je otočení kolem jeho těžiště o úhel 120°, viz Obr. 58 (Jak víme, jedná se o projev rotační symetrie rovnostranného trojúhelníku). Napište rovnice této shodnosti!



Obrázek 58: Rovnostranný trojúhelník se v otočení $\mathcal{R}(T, 120°)$ zobrazí sám na sebe.

5.11 Cvičení: Otočení

1. Najděte souřadnice obrazu bodu $B = [1,2]$ v otočení v E_2 kolem středu $S = [3,-4]$ o úhel $\alpha = 420°$. Napište rovnice této shodnosti.

2. Rotace kolem bodu $S = [2;1]$ v E_2 zobrazuje bod $A = [1;1]$ na bod A'. Najděte souřadnice bodu A', jestliže pro úhel rotace α platí $\alpha = \frac{2}{3}\pi$.

3. Najděte souřadnice středu a úhel rotace, která je dána rovnicemi: $x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 1,\ y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 2.$

4. Jsou dány dvě shodné úsečky AB, CD. Určete otočeení, které zobrazí A na C a B na D.

5. Je dána kružnice $k(S;r)$ a bod $P \neq S$. Bodem P veďte přímku, na které kružnice vytíná úsečku dané velikosti d.

6. Jsou dány různé rovnoběžné přímky a, b, c a bod A, který leží na přímce a. Sestrojte všechny rovnostranné trojúhelníky ABC, jejichž vrcholy B, C leží po řadě na přímkách b, c.

Otočení - Příklady pro dobrovolné řešení

7. Najděte rovnice obrazu přímky p v rotaci v E_2 kolem středu $S = [-2;1]$ o úhel $\alpha = \frac{\pi}{6}$, jestliže $p : x - y + 1 = 0$.

8. Je dána kružnice $k(S;r)$, bod B a úsečka délky d $(d < 2r)$. Sestrojte tětivu XY kružnice k délky d tak, aby byla vidět z bodu B pod úhlem 60°.

9. Jsou dány dvě rovnoběžné přímky a, b a mimo ně bod C. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC tak, aby jeho vrcholy A, B ležely po řadě na přímkách a, b.

10. Jsou dány kružnice k, přímka p a bod A ležící vně k. Sestrojte rovnostranný trojúhelník s vrcholem v bodě A tak, aby zbývající vrcholy ležely na k a na p.

11. Je dána kružnice $k(S;3cm)$ a bod A $(|SA| = 1.5cm)$. Sestrojte všechny tětivy XY kružnice k o délce $5.5cm$, které procházejí bodem A.

12. Při odvalování kružnice po přímce se body soustavy spojené s kružnicí pohybují po trajektoriích, kterým se říká **cykloidy**. Rozlišujeme tři typy cykloid, v závislosti na tom, zda bod leží vně, na nebo uvnitř kružnice. Zobrazte tyto křivky pomocí programu GeoGebra.