5.5 Symetrie

V následujících pasážích se budeme detailně věnovat jednotlivým shodnostem v rovině; *osové souměrnosti*, *otočení*, *středové souměrnosti*, *posunutí*, *posunutému zrcadlení* a *identitě*[8]. Za zamyšlení stojí otázka, jak se tato zobrazení zrodila. Téměř s jistotou se dá říci, že k tomu významně přispěly *symetrie*, které člověk ve svém okolí rozeznával, případně i vytvářel, viz Obr. 27. V souvislosti se shodnostmi v ro-

Obrázek 27: Symetrie kolem nás (*zdroj: archiv autora*)

vině se konkrétně zaměříme na *symetrie roviny*[9], tj. takové transformace roviny, při nichž buď zůstává zachován nějaký rovinný obrazec, nebo zůstává zachována nějaká jeho vlastnost (např. tvar u stejnolehlosti). Ve svém okolí můžeme vypozorovat následující symetrie:

- zrcadlení (osová symetrie),
- otočení (rotační symetrie),
- posunutí (translační symetrie),
- stejnolehlost (podobnost).

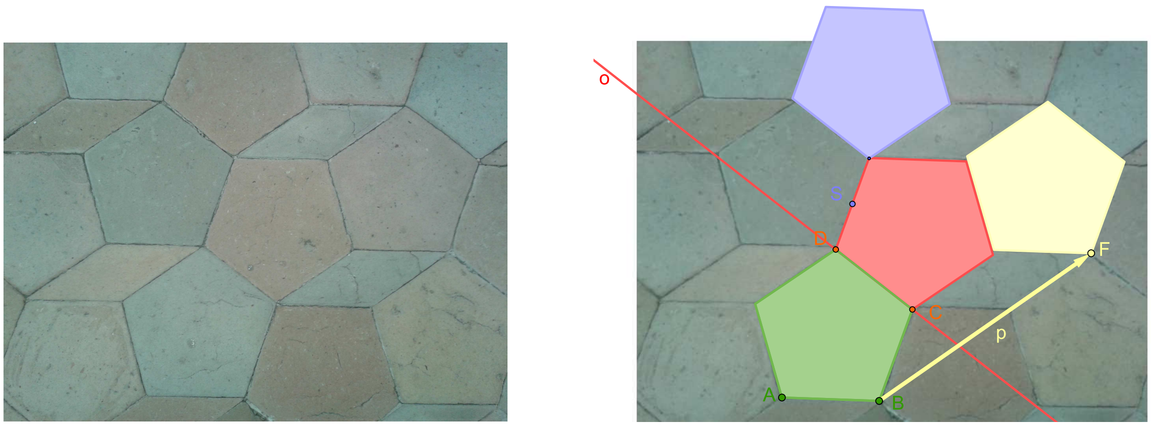
PŘÍKLAD 5.12. *Pozorně si prohlédněte všechny fotografie na Obr. 27. U každé z nich popište alespoň jednu symetrii, kterou na ní pozorujete (v případě kytek, které jsou reálně trojrozměrné se soustřeďte na tvar jejich zachycení do roviny fotografie).*

[8] Pro detailní přehled shodností v rovině viz např. *Wikipedia: Euclidean plane isometry*

[9] Pro podrobné pojednání o symetrii v geometrii viz např. *Wikipedia: Symmetry (geometry)*

PŘÍKLAD 5.13. *Nechte se inspirovat Obr. 27 a pořiďte sami fotografii nějakého reálného objektu, který vykazuje vlastnost symetrie. Tuto symetrii, nebo symetrie, je-li jich více, popište a náležitě prezentujte zpracováním fotografie v GeoGebře, tak, jak je provedeno v řešení následujícího příkladu 5.14, viz Obr. 28 vpravo.*

Pro znázornění symetrií nebo shodností zachycených na obrázku můžeme dobře použít program GeoGebra. Na Obr. 28 je zobrazena dlažba z kostela sv. Jana Nepo-



Obrázek 28: Kostel sv. Jana Nepomuckého, Zelená hora u Žďáru nad Sázavou

muckého na Zelené hoře u Žďáru nad Sázavou, vlevo na prosté fotografii, vpravo pak na této fotografii doplněné obrazci sestrojenými v GeoGebře, jejichž uvedením jsou naznačeny vybrané shodnosti, které můžeme v motivu dlažby mezi určitými dlaždicemi vypozorovat (konkrétně se jedná o *osovou souměrnost*, *posunutí* a *středovou souměrnost*, určitě ale odhalíte i další). Obrázek umístíme na pozadí „Nákresny“ GeoGebry pomocí nástroje `Obrázek` (`Image`).

PŘÍKLAD 5.14. *Na fotografii, viz Obr. 28, vlevo, je zachycena část dlažby položené na podlaze kostela Sv. Jana Nepomuckého na Zelené hoře u Žďáru nad Sázavou. Najděte a znázorněte konkrétní shodnosti, v nichž se vybraná dleždice zobrazuje na jiné.*

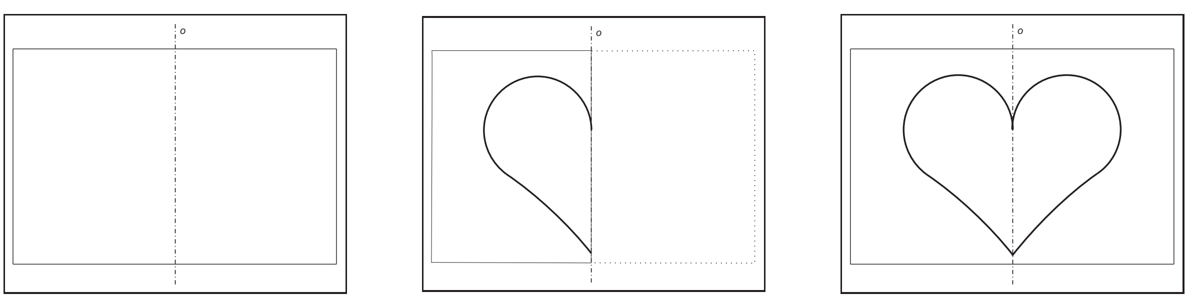
Řešení: Řešení je uvedeno v online materiálu na adrese https://www.geogebra.org/m/NatBC a zachyceno na Obr. 28, vpravo. Z materiálu si můžete stáhnout zdrojový soubor k tomuto zobrazení symetrií do fotografie. Je v něm také naznačen postup vložení obrázku na pozadí *Nákresny* GeoGebry. Pro podrobnější návod jak vkládat obrázek na pozadí Nákresny lze potom doporučit video *YouTube:İmporting an Image in GeoGebra.*

5.6 Osová souměrnost

Osová souměrnost je určena přímkou, které říkáme *osa souměrnosti*. Osovou souměrnost s osou o značíme $\mathcal{S}(o)$. Jedná se o nepřímou shodnost.

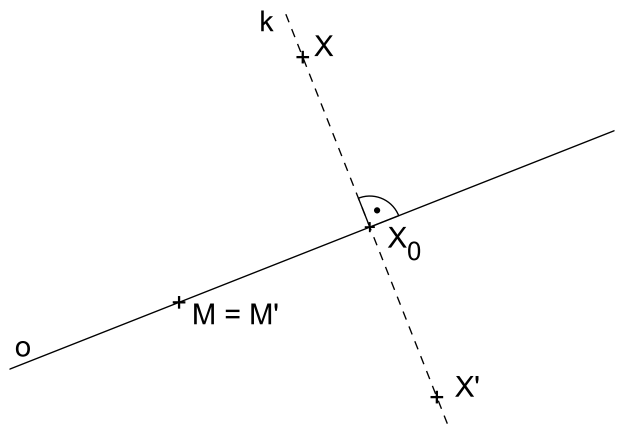
Obrázek 29: Osová souměrnost (zrcadlení)

Jak už bylo řečeno v kapitole 5.5, geometrické zobrazení *osová souměrnost* souvisí s *osovou symetrií*. V případě osové symetrie konkrétního obrazce hovoříme též o *osově souměrném* obrazci, viz například fotografie na Obr. 29 (v případě vlastních trojrozměrných objektů, na fotografiích zachycených, bychom hovořili spíše o *zrcadlení* nebo o *rovinové symetrii (souměrnosti)*). Osově souměrný je potom takový útvar, který se v osové souměrnosti dle určité osy zobrazí (viz Def. 18) sám na sebe. Příkladem takového obrazce je *srdce*. Praktickým uplatněním osové souměrnosti, se kterým se většina z nás setkala, je postup při „výrobě“ takovéhoto srdce z papíru, aby mělo co nejdokonalejší tvar (viz Obr. 30). Z papíru přeloženého napůl vystřihneme polovinu srdce, která se po rozevření papíru „zobrazí“ v osové souměrnosti kolem osy přeložení. Takto získané srdce je příkladem *osově souměrného útvaru*, tj. útvaru, který se v osové souměrnosti s osou jdoucí přehybem zobrazí sám na sebe.



Obrázek 30: Osová souměrnost v praxi

Definice 18 (Osová souměrnost). *Osová souměrnost je určena přímkou, označme ji o, kterou nazýváme osa souměrnosti, viz Obr. 31. Obrazem libovolného bodu M této přímky o je bod M sám, tj. pro obraz M' bodu $M \in o$ platí $M' \equiv M$ (říkáme, že každý bod osy souměrnosti je samodružný). Ke každému bodu X, který neleží na ose o, sestrojíme obraz X' takto: Bodem X vedeme kolmici k na přímku o a její patu označíme X_0. Na polopřímce opačné k polopřímce $\overrightarrow{X_0X}$ sestrojíme bod X' tak, že $|X'X_0| = |XX_0|$. Osovou souměrnost s osou o značíme $\mathcal{O}(o)$.*



Obrázek 31: Definice osové souměrnosti

Poznámka. O bodech X, X' říkáme, že je to dvojice bodů *souměrně sdružených* podle osy o.

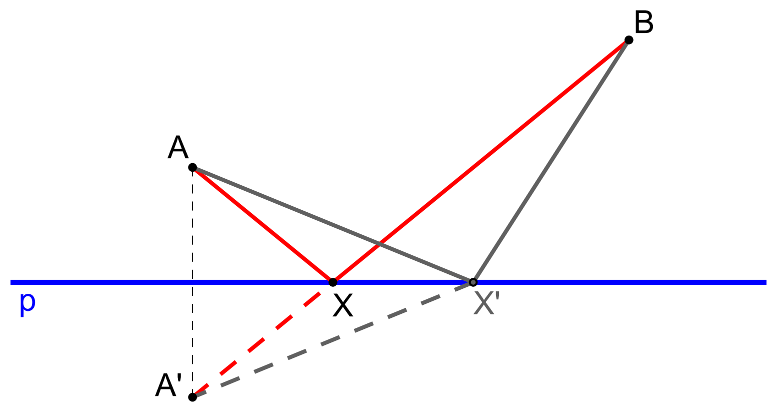
Involutorní zobrazení (involuce). Osová souměrnost je prvním příkladem tzv. *involutorního zobrazení*, též nazývaného *involuce*, se kterým se setkáváme. Involutorními zobrazeními jsou taková zobrazení, u kterých lze zaměnit role vzoru a obrazu. To znamená, že je-li bod L obrazem bodu K, je bod K zároveň obrazem bodu L.

Involutorní zobrazení můžeme také poznat podle toho, že složíme-li ho samo se sebou, dostaneme *identitu*. Asi nikoho nepřekvapí, že když obraz X' bodu X v osové souměrnosti $\mathcal{O}(o)$ zobrazíme opět v této souměrnosti, dostaneme se zpět do bodu X, viz Obr. 31.

PŘÍKLAD 5.15. *Jaké další shodnosti v rovině jsou involutorními zobrazeními? Pokuste se je vyjmenovat a svou volbu zdůvodněte.*

PŘÍKLAD 5.16. *Je dána přímka p a body A, B v téže polorovině s hraniční přímkou p. Najděte všechny body $X \in p$ takové, že součet vzdáleností $|AX| + |BX|$ je minimální.*

Řešení[10]*:* Užitím osové souměrnosti převedeme řešení tohoto příkladu na jednoduchou úlohu najít nejkratší spojnici dvou bodů v rovině. Vtip je v tom, že pro obraz A' bodu A v $\mathcal{O}(p)$ platí $|A'Y| = |AY|$ (kde Y je libovolný bod, pro který $Y \in p$). Můžeme tedy místo s A pracovat s A'. Pak je jasné, že úsečka $A'B$ je kratší než lomená čára $A'YB$. Protože samozřejmě také $|A'X| = |AX|$, je hledaným bodem X, průsečík přímky $A'B$ s přímkou p.



Obrázek 32: Využití osové souměrnosti ke geometrickému řešení příkladu 32

Samodružné body a směry osové souměrnosti, samodružné přímky

Jak víme, každá shodnost je unikátní svou kombinací samodružných bodů a směrů, viz tabulka 5.2 na str. 35. Proto si tuto určující vlastnost u každé shodnosti ještě připomeneme.

Osová souměrnost má přímku samodružných bodů, osu, a dva na sebe kolmé samodružné směry, jeden rovnoběžný se směrem osy, druhý na něj kolmý. Samodružné přímky osové souměrnosti jsou potom přímky kolmé na její osu.

Nabízí se otázka, kolik samodružných bodů a jak rozložených potřebujeme identifikovat, abychom určili osu osové souměrnosti. Víme, že přímka je určena dvěma body. Stačí tedy k určení osy najít dva samodružné body? A co kdybychom našli tři, které neleží v přímce, o jaké zobrazení by se potom jednalo?

PŘÍKLAD 5.17. *Dokažte následující dvě tvrzení: „Jestliže existují na přímce dva různé samodružné body shodnosti, pak každý bod této přímky je samodružný.“ „Máli shodnost aspoň tři nekolineární samodružné body, je to identita.“*

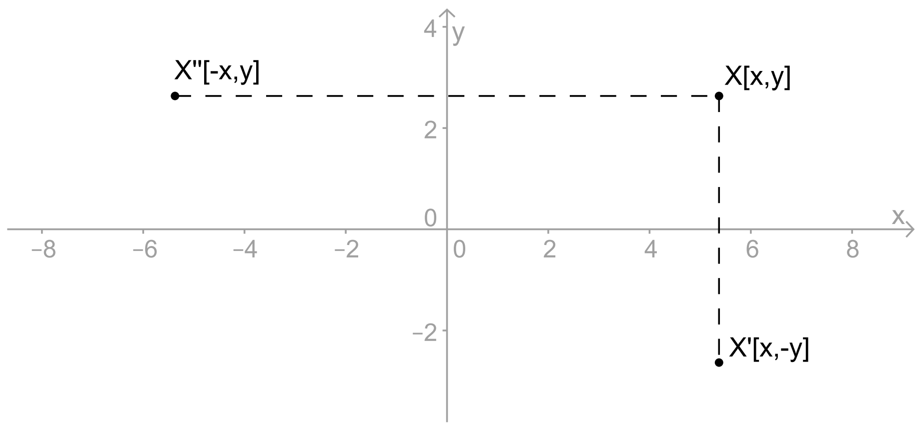
Z pravdivosti tvrzení uvedených v příkladu 5.17 vyplývá, že *má-li shodnost dva různé samodružné body a není identitou, pak je osovou souměrností.*

[10] Tato úloha je známa také jako *Heronův problém* (Hérón Alexandrijský, přibl. 10-70 n.l.).

Analytické vyjádření osové souměrnosti $\mathcal{O}(o)$ v rovině

PŘÍKLAD 5.18. *Napište analytické vyjádření osové souměrnosti $\mathcal{O}(x)$ s osou v souřadnicové ose x a osové souměrnosti $\mathcal{O}(y)$ s osou v souřadnicové ose y.*

Řešení: Dle Obr. 33 je ihned zřejmé, že zadané osové souměrnosti mají níže uvedená analytická vyjádření.



Obrázek 33: Odvození rovnic osové souměrnosti s osou v souřadnicové ose x (y)

Osová souměrnost s osou x:

$$x' = x$$
$$y' = -y$$

Osová souměrnost s osou y:

$$x' = -x$$
$$y' = y$$

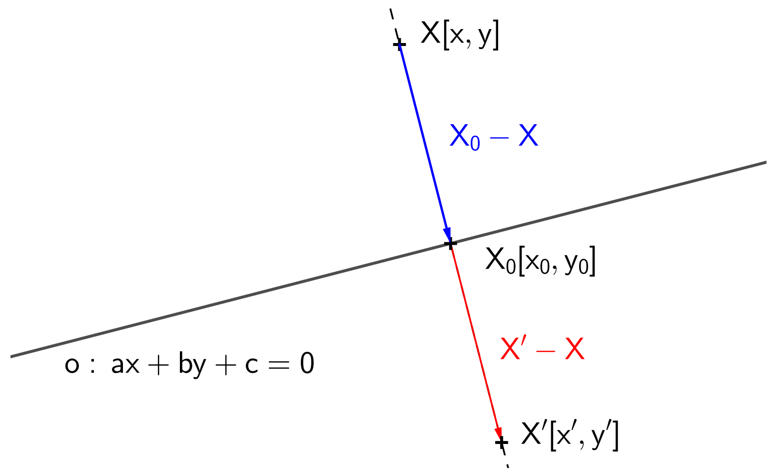
Ne vždy je ale možné osu souměrnosti takto výhodně umístit do souřadnicové osy. Proto si odvodíme rovnice osové souměrnosti s obecně umístěnou osou.

Osová souměrnost podle osy o dané rovnicí $o: ax + by + c = 0$

Dle Obr. 34 je zřejmé, že vektor $X' - X$ je dvojnásobkem vektoru $X_0 - X$ a vektor $X_0 - X$ je (stejně jako $X' - X$) kolmý k ose o, tj. je k-násobkem ($k \in R$) jejího normálového vektoru $\vec{n} = (a, b)$. Tyto skutečnosti zapíšeme rovnostmi

$$X' - X = 2(X_0 - X), \tag{43}$$
$$X_0 - X = k(a, b), \tag{44}$$

kde pro souřadnice uvedených bodů platí $X[x, y]$, $X'[x', y']$ a $X_0[x_0, y_0]$. Protože $X_0 \in o$, musí jeho souřadnice x_0, y_0 splňovat obecnou rovnici osy $o: \ ax + by + c = 0$. Souřadnice bodu X_0 proto z (44) vyjádříme jako $x_0 = x + ka$, $y_0 = y + kb$ a dosadíme



Obrázek 34: Odvození rovnic osové souměrnosti $O(o)$

do obecné rovnice osy o: $a(x+ka)+b(y+kb)+c=0$. Odtud potom vyjádříme parametr $k=-\dfrac{ax+by+c}{a^2+b^2}$, který dosadíme do rovnice

$$X'-X=2k(a,b).$$

Po úpravě a rozepsání po složkách dostáváme rovnice osové souměrnosti $\mathcal{O}(o)$:

$$x' = x - \frac{2a}{a^2+b^2}\left(ax+by+c\right),$$
$$y' = y - \frac{2b}{a^2+b^2}\left(ax+by+c\right).$$

PŘÍKLAD 5.19. *V eukleidovské rovině je dána souměrnost podle přímky $p: 3x - 4y+1=0$. Napište rovnice této souměrnosti.*

Řešení: Z obecné rovnice osy $3x-4y+1=0$ si vyjádříme $a=3$, $b=-4$ a $c=1$. Potom výrazy $\dfrac{2a}{a^2+b^2}, \dfrac{2b}{a^2+b^2}$ figurující v rovnicích osové souměrnosti mají hodnoty $\dfrac{2a}{a^2+b^2}=\dfrac{6}{25}$ a $\dfrac{2b}{a^2+b^2}=\dfrac{-8}{25}$. Hledané rovnice potom vypadají takto

$$x' = x - \frac{6}{25}\left(3x-4y+1\right),$$
$$y' = y + \frac{8}{25}\left(3x-4y+1\right).$$

Po úpravě dostáváme konečnou podobu rovnic

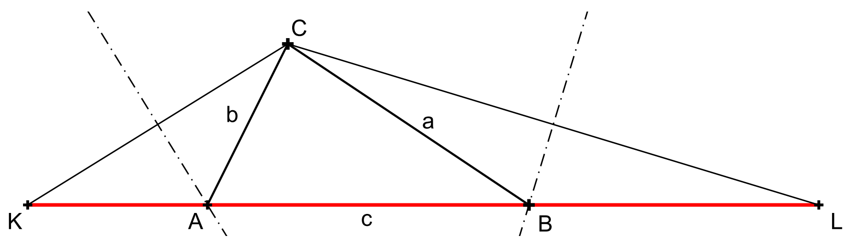
$$x' = \frac{7}{25}x + \frac{24}{25}y - \frac{6}{25},$$
$$y' = \frac{24}{25}x - \frac{7}{25}y + \frac{8}{25}.$$

5.7 Cvičení: Osová souměrnost

1. Napište rovnice souměrnosti podle přímky $o : 2x - 3y + 1 = 0$.

2. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dán obvod $o = 12\,cm$ a úhly $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$.

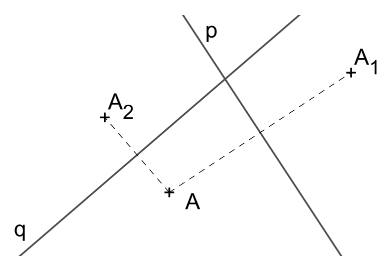
Nápověda: Viz Obr. 35.



Obrázek 35: Sestrojte trojúhelník, znáte-li jeho obvod a vnitřní úhly

3. Jsou dány dvě různoběžky p, q a bod A mimo ně. Najděte body $B \in p$, $C \in q$ tak, aby obvod trojúhelníku ABC byl minimální.

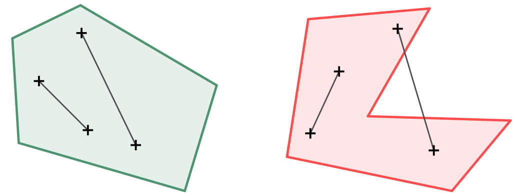
Nápověda: Viz Obr. 36.



Obrázek 36: Sestrojte trojúhelník δABC; $B \in p$, $C \in q$, minimálního obvodu

4. Sestrojte konvexní čtyřúhelník $ABCD$ se stranami dané velikosti, je-li polopřímka $\mapsto AC$ osou vnitřního úhlu při vrcholu A.

Poznámka (*Konvexní* a *nekonvexní* (*konkávní*) útvar[11]). Útvar (množina bodů) je



Obrázek 37: Konvexní útvar (vlevo) a nekonvexní, též konkávní, útvar (vpravo)

[11] Pro konvexní mnohoúhelníky viz též *Wikipedia: Convex polygon*

konvexní, jestliže pro každé dva jeho body je úsečka, která je spojuje, jeho podmnožinou, viz Obr. 37, vlevo. *Nekonvexní*, též *konkávní*, je potom útvar, v němž se nacházejí takové body, že jejich spojnice není jeho podmnožinou, tj. nenáleží mu celá, viz Obr. 37, vpravo.

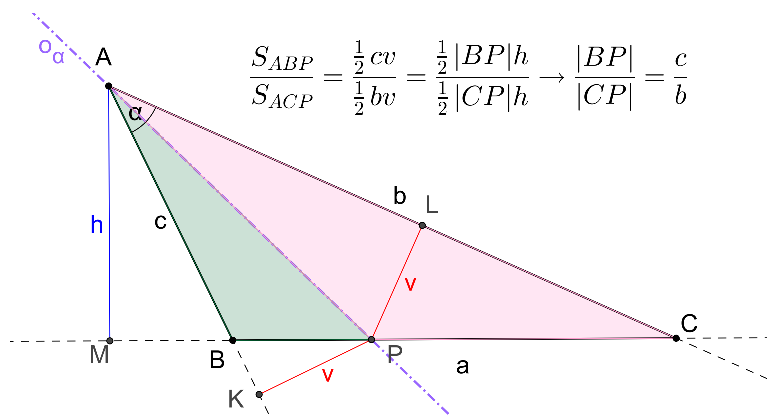
5. Sestrojte čtverec $ABCD$, je-li dáno $a + e = 10\,cm$.

6. Sestrojte obdélník $ABCD$, je-li dáno $e = 7\,cm$, $a - b = 1\,cm$.

7. Sestrojte lichoběžník $ABCD$ $(AB \| CD)$, je-li dáno $b = 3\,cm$, $c = 2.5\,cm$, $d = 2.6\,cm$, $\alpha - \beta = 20°$.

8. Dokažte větu: „V každém trojúhelníku dělí osa libovolného vnitřního úhlu protější stranu v poměru stran přilehlých.“

Nápověda: Viz Obr. 38.



Obrázek 38: Osa úhlu α rozděluje stranu BC průsečíkem P na dvě části s poměrem délek $\frac{BP}{CP} = \frac{c}{b}$

9. Dokažte **Vivianiho větu**.

Věta 4 (Vivianiho věta). *V rovnostranném trojúhelníku je hodnota součtu vzdáleností libovolného bodu od stran trojúhelníku konstantní, nezávislá na poloze bodu.*

Nápověda: Řešili jsme na semináři.
Další zdroje viz např. https://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/Viviani.shtml nebo https://mathworld.wolfram.com/VivianisTheorem.html. Dynamické důkazy Vivianiho věty najdete v GeoGebra knize *Dynamické důkazy*. Některý z nich můžete vzít jako základ svého řešení, pokud ho náležitě zobrazíte, klidně i „staticky“, a okomentujete.

Osová souměrnost – Příklady pro dobrovolné řešení

10. Řešte **Fagnanův problém**:
„Danému ostroúhlému trojúhelníku vepište trojúhelník o nejmenším obvodu."

Nápověda: Viz např. https://www.cut-the-knot.org/triangle/Fagnano.shtml nebo https://mathworld.wolfram.com/FagnanosProblem.html.

11. Proveďte následující tzv. **Mascheroniovu konstrukci**[1]:
„Je dána kružnice $k(S;r)$; dále je dána dvěma body A, B (body neleží na kružnici) její sečna p, která neprochází středem S. Sestrojte průsečíky přímky p s kružnicí k, aniž přitom použijete pravítka."

12. Dokažte následující vlastnost **průsečíku výšek (ortocentra)** trojúhelníku:
„Body souměrně sdružené s průsečíkem výšek podle stran trojúhelníka, leží na kružnici trojúhelníku opsané."

Nápověda: Řešili jsme v semináři, další informace viz např.
https://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/AltitudeAndCircumcircle.shtml

13. Napište rovnice osové souměrnosti, zobrazující počátek na bod $[1,5]$.

14. Je dána přímka p a dvě kružnice k_1, k_2 oddělené přímkou p. Sestrojte rovnostranný trojúhelník tak, aby na každé z kružnic k_1, k_2 byl jeden vrchol a jedna z výšek ležela na přímce p.

15. Jsou dány tři různé přímky p_1, p_2, p_3, procházející bodem S; na přímce p_1 je dán bod $A \neq S$. Sestrojte trojúhelník ABC, jehož osy vnitřních úhlů leží v přímkách p_1, p_2, p_3.

16. Jsou dány tři přímky o_1, o_2, o_3 procházející bodem O. Na o_1 dán bod A_1. Sestrojte $\triangle ABC$ tak, aby o_1, o_2, o_3 byly osami jeho stran a bod A_1 středem strany BC.

17. Jsou dány body X, Y a přímka p, která je odděluje. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC, jehož hlavním vrcholem je bod C, osou souměrnosti přímka p a jehož ramena mají danou velikost a. Přímka AC nechť prochází bodem X a přímka BC bodem Y.

18. Je dána přímka p a body A, B ležící ve stejné polorovině s hraniční přímkou p. Sestrojte bod $X \in p$ tak, aby $|\angle AXp| = 2|\angle BXp|$.

[1] *Lorenzo Mascheroni* (italský matematik, 1750–1800) dokázal ve své knize *Geometria del Compasso* (1797), že každá konstrukce realizovatelná užitím kružítka a pravítka bez měřítka se dá provést pouze pomocí kružítka. Proto se takovým konstrukcím říká Mascheroniovy konstrukce. Nutno však uvést, že důkaz téhož tvrzení publikoval více než sto let před Mascheronim dánský matematik *Georg Mohr*.

19. Jsou dány body A, B, C a přímka p kolmá k přímce AB tak, že prochází bodem C a body A, B leží v téže polorovině určené přímkou p. Sestrojte na přímce p takový bod X, aby z něho byla vidět úsečka AB pod stejným úhlem jako úsečka BC.

20. Obrazy středu S kružnice opsané trojúhelníku ABC v osových souměrnostech podle přímek BC, AC, AB jsou vrcholy trojúhelníku $A_1B_1C_1$. Dokažte, že je tento trojúhelník shodný s trojúhelníkem ABC.