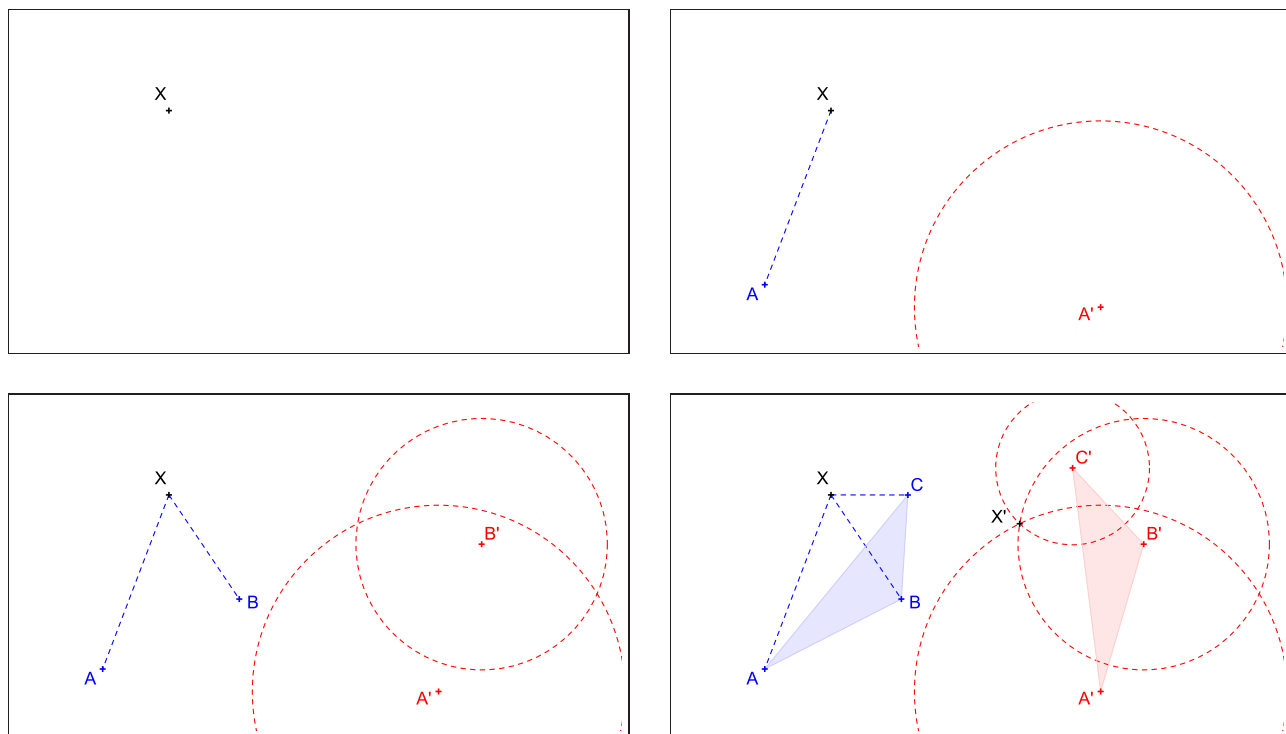


## 7.1 Tři osové souměrnosti stačí

Než opustíme téma shodností v rovině, naznačíme si zde důkazy dvou „ikonických“ vět o shodnostech v rovině. Konkrétně se jedná o větu 3 (*O určenosti shodného zobrazení v rovině*) na str. 24, která ve stručnosti říká, že k zavedení shodnosti v rovině (shodné transformace roviny na sebe) nám stačí umístit do ní odpovídajícím způsobem dvojici shodných trojúhelníků, které jsou ve vztahu *vzor a obraz* v této shodnosti, a o větu 5, viz str. 62, ke které jsme se v minulých partiích hojně obraceli, a která říká, že každou shodnost v rovině lze složit z nejvýše tří osových souměrností.

**Věta.** *Shodné zobrazení v rovině je jednoznačně určeno libovolnými třemi nekolineárními body  $A, B, C$  a třemi nekolineárními body  $A', B', C'$ , které jsou po řadě jejich obrazy.*

*Důkaz.* Myšlenka důkazu je zachycena v appletu <https://www.geogebra.org/m/RYaKE4Jw>. Děj, který je obsažen v tomto dynamickém obrázku si nyní rozdělíme do jednotlivých fází, viz Obr. 78. Máme na mysli nějakou shodnost v rovině a chceme najít



Obrázek 78: K zavedení shodnosti v rovině potřebujeme tři nekolineární body  $A, B, C$  a jejich obrazy  $A', B', C'$  v této shodnosti.

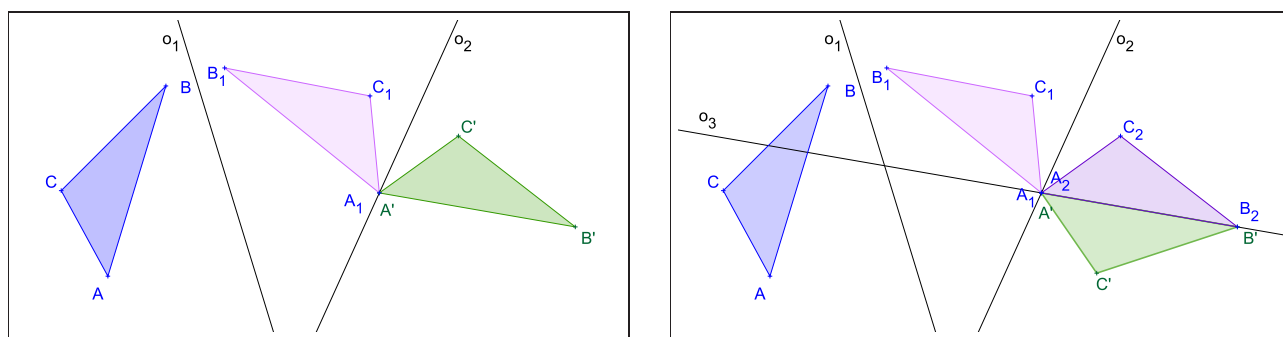
obraz bodu  $X$  v této shodnosti, viz Obr. 78, vlevo nahoře. Ptáme se, kolik dvojic bodů ve vztahu vzor–obraz v uvažovaném zobrazení musíme znát, abychom mohli libovolný bod  $X$  bezpečně zobrazit. Uvažujeme-li jednu dvojici,  $A$  a  $A'$ , je to málo. Aby byla splněna definice shodnosti, musí platit  $|A'X'| = |AX|$ . Takových bodů je

ale nekonečně mnoho, vyplňují celou kružnici se středem  $A'$  a poloměrem  $|AX|$ , viz Obr. 78, vpravo nahoře. Přidáme tedy další dvojici  $B, B'$ . Potom musí platit nejenom  $|A'X'| = |AX|$ , ale také  $|B'X'| = |BX|$  a samozřejmě rovněž  $|A'B'| = |AB|$ . Počet možností pro umístění  $X'$  se tím podstatně snížil, už jsou jenom dvě, viz Obr. 78, vlevo dole, pořád to ale není jednoznačné určení obrazu  $X'$ , které požadujeme. To nastane až přidáním třetí dvojice  $C, C'$ , tak aby ani  $A, B, C$ , ani  $A', B', C'$  neleželi v jedné přímce, viz Obr. 78, vpravo dole. Shodné zobrazení v rovině je tedy jednoznačně určeno dvojicí shodných trojúhelníků  $\triangle ABC$  a  $\triangle A'B'C'$ . Co by nastalo, kdyby body  $A, B, C$ , resp.  $A', B', C'$  byly kolineární snadno zjistíte pomocí výše uvedeného appletu.  $\square$

Právě dokázanou větu o určenosti shodného zobrazení v rovině (jinak se jedná o větu 3 ze str. 24) nyní použijeme při důkazu věty následující (uvedena jako věta 5 na str. 62).

**Věta.** Každá shodnost v rovině se dá složit z nejvýše tří osových souměrností.

*Důkaz.* Z věty o určenosti shodného zobrazení v rovině víme, že shodnost v rovině je jednoznačně určena dvojicí shodných trojúhelníků ve vztahu vzor a obraz v této shodnosti. Stačí tedy dokázat, že pro zobrazení trojúhelníku, řekněme  $\triangle ABC$ , na jakýkoliv jiný s ním shodný trojúhelník potřebujeme nejvýše tři osové souměrnosti. Jak vidíme na Obr. 79, kde je postup tohoto důkazu znázorněn pro přímo i nepřímou shodnost trojúhelníků  $\triangle ABC$  a  $\triangle A'B'C'$ , nejedná se o nic složitějšího. Stačí postupovat



Obrázek 79: K „přechodu“ mezi dvěma trojúhelníky  $\triangle ABC$  a  $\triangle A'B'C'$  použijeme v případě přímé shodnosti dvě osové souměrnosti (vlevo), v případě nepřímé shodnosti tři osové souměrnosti (vpravo).

systematicky. Cílem je, skládat osové souměrnosti dokud se konečný obraz  $\triangle ABC$  nebude krýt s  $\triangle A'B'C'$ . Začneme sestrojením osy  $o_1$  úsečky  $AA'$ , potom v osové souměrnosti  $\mathcal{O}(o_1)$  zobrazíme  $\triangle ABC$  na  $\triangle A_1B_1C_1$ . Tím jsme bod  $A$  již „dovezli“ do cíle, protože  $A_1 \equiv A'$ . Pokračujeme sestrojením osy  $o_2$  úsečky  $B_1B'$  (v případě přímé shodnosti je zároveň osou  $C_1C'$ ). Potom zobrazíme  $\triangle A_1B_1C_1$  v  $\mathcal{O}(o_2)$ . V případě přímé shodnosti jsme již dosáhli cíle, výsledný trojúhelník se kryje (je totožný)

s  $\Delta A'B'C'$ , viz Obr. 79, vlevo. V případě nepřímé shodnosti musíme ještě sestrojít osu  $o_3$ , aby se v  $\mathcal{O}(o_3)$  trojúhelník  $\Delta A_2B_2C_2$  zobrazil na  $\Delta A'B'C'$ , viz Obr. 79, vpravo. Uvedený postup konstrukce os a zobrazování trojúhelníků si prakticky vyzkoušejte pomocí appletu <https://www.geogebra.org/m/erviiUBL>.

□