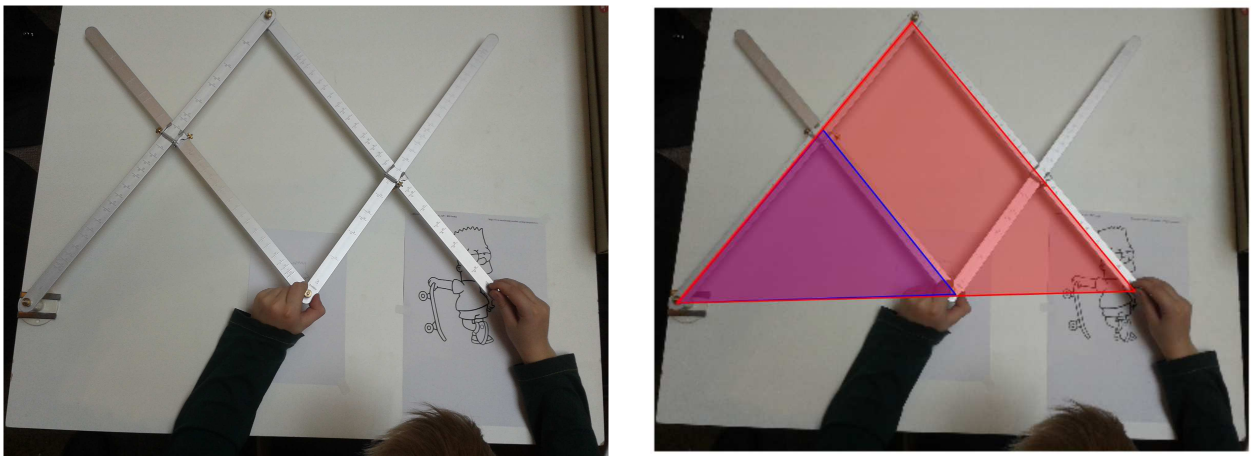
9 Stejnolehlost

Stejnolehlost je podobné zobrazení, které je určeno svým *jediným samodružným bodem*, kterému říkáme *střed stejnolehlosti*, a reálným číslem různým od 0 a 1, kterému říkáme *koeficient stejnolehlosti*. Protože jsou ve stejnolehlosti *všechny směry samodružné*, řadí se mezi tzv. *homotetie*[20], jak se zobrazení s touto vlastností nazývají (dalšími homotetiemi jsou identita, posunutí a středová souměrnost). Stejnolehlost



Obrázek 95: Pantograf – mechanická realizace stejnolehlosti

se středem S a koeficientem κ (malé řecké písmeno *kappa*, tradiční symbol pro koeficient stejnolehlosti, samozřejmě lze ale použít i jiná písmena) zapisujeme $\mathcal{H}(S, \kappa)$. Konkrétní vztah mezi vzorem a obrazem v tomto zobrazení je popsán jeho definicí.

Uvedeme si dvě definice stejnolehlosti. První z nich, definice 25, popisuje krok za krokem postup zobrazení bodu roviny v dané stejnolehlosti. Je to ta definice, která se většinou uvádí ve středoškolských učebnicích. Její výhodou je, že poskytuje jasný algoritmus nalezení obrazu pro libovolný bod roviny. Druhá z definic, definice 26, je podstatně stručnější, maximálně těží z vlastností geometrických vektorů. Jejím přínosem je stručné vyjádření podstaty vztahu mezi obrazem a vzorem ve stejnolehlosti, které oceníme třeba při hledání jeho analytického vyjádření.

Zobrazení úsečky XY ve dvou stejnolehlostech lišících se znaménkem koeficientu vidíme na Obr. 96.

Definice 25 (Stejnolehlost I). *Budiž dán bod S a reálné číslo κ (různé od 0 a 1). Stejnolehlost $\mathcal{H}(S; \kappa)$ se středem S a koeficientem κ je zobrazení, které každému bodu X roviny přiřadí bod X' tímto způsobem:*

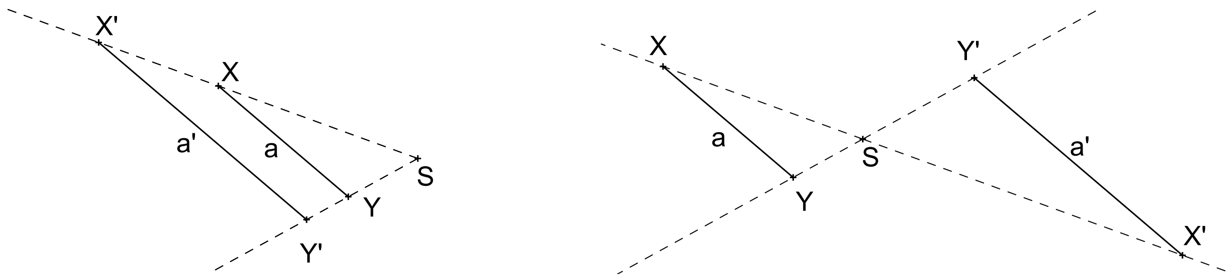
1. Pro $X \equiv S$ je $X' \equiv X$,

[20] Anglicky je stejnolehlost *homothety*, též *dilation*, viz `https://en.wikipedia.org/wiki/Homothetic_transformation`

2. Pro $X \not\equiv S$ je $|X'S| = |\kappa| \cdot |XS|$,

pro $\kappa > 0$ leží X' leží na polopřímce $\overrightarrow{SX}$ a

pro $\kappa < 0$ leží X' leží na polopřímce opačné k $\overrightarrow{SX}$.



Obrázek 96: Stejnolehlost $H(S, \kappa = 1.6)$ (vlevo) a $H(S, \kappa = -1.6)$ (vpravo)

Definice 26 (Stejnolehlost II). *Budiž dán bod S a reálné číslo κ (různé od 0 a 1). Stejnolehlost $\mathcal{H}(S; \kappa)$ se středem S a koeficientem κ je zobrazení, které každému bodu X roviny přiřadí bod X' tak, že*

$$\overrightarrow{SX'} = \kappa \overrightarrow{SX}. \tag{74}$$

PŘÍKLAD 9.1. *Sestrojte obraz trojúhelníku ΔABC ve stejnolehlosti $\mathcal{H}(S, \kappa)$.*

Řešení: Zobrazení trojúhelníku ΔABC ve stejnolehlostech $\mathcal{H}$ s různými koeficienty κ si vyzkoušejte v online appletu https://www.geogebra.org/m/arUb8mt6.

Vlastnosti stejnolehlosti $H(S, \kappa)$

1. Vzor, jeho obraz a střed stejnolehlosti leží v jedné přímce.

2. Obrazem přímky je přímka s ní rovnoběžná.

3. Obrazem úsečky AB je úsečka $A'B'$ s ní rovnoběžná; $A'B' \| AB \wedge |A'B'| = |\kappa| \cdot |AB|$.

4. Obrazem polopřímky je polopřímka s ní souhlasně ($\kappa > 0$) nebo nesouhlasně ($\kappa < 0$) rovnoběžná.

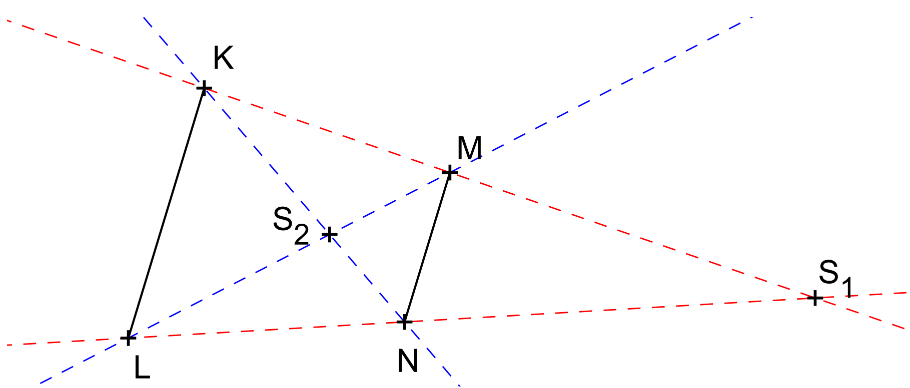
5. Obrazem úhlu $\angle AVB$ je úhel $\angle A'V'B'$; $|\angle A'V'B'| = |\angle AVB|$.

6. Zobrazení inverzní k stejnolehlosti $\mathcal{H}(S;\kappa)$ je stejnolehlost se stejným středem S, ale s převráceným koeficientem $\frac{1}{\kappa}$, tj. $\mathcal{H}^{-1}\left(S;\frac{1}{\kappa}\right)$.

7. Stejnolehlost s koeficientem $\kappa=-1$ je středovou souměrností, $\mathcal{H}(S,\kappa=-1)\equiv\mathcal{S}(S)$.

PŘÍKLAD 9.2. *Jsou dány dvě vzájemně rovnoběžné úsečky různých délek. Určete středy stejnolehlostí, v nichž se jedna z nich zobrazuje na druhou.*

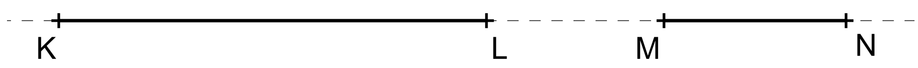
Řešení: Viz Obr. 97. Využijeme výše uvedenou vlastnost č. 1: *Vzor, jeho obraz a střed stejnolehlosti leží v jedné přímce.* Protože je stejnolehlost afinním zobrazením, zobrazí se úsečka zase na úsečku, konkrétně krajní body zase na krajní body a vnitřní body zase na vnitřní body. Zaměříme se na krajní body úseček. Buď se body K,L zobrazí po řadě na M,N, nebo na N,M. Spojíme-li dvojice bodů *vzor–obraz*, např. $K\longrightarrow M$, $L\longrightarrow N$, přímkami, jejich průsečíkem je střed příslušné stejnolehlosti (protože musí ležet na každé z těchto přímek), v daném případě S_1. Pro dvojice $K\longrightarrow N$, $L\longrightarrow M$ dostáváme střed S_2. Koeficienty příslušných stejnolehlostí se liší pouze znaménkem, jejich absolutní hodnota je rovna poměru délek úseček, pro případ zobrazení úsečky KL na MN, resp. NM je $|\kappa|=\frac{|KL|}{|MN|}$, v opačném případě je $|\kappa|=\frac{|MN|}{|KL|}$.



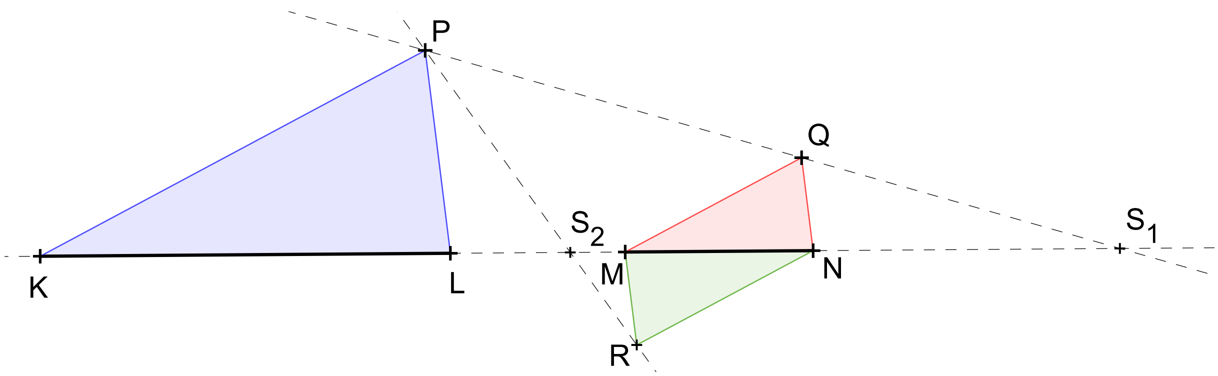
Obrázek 97: Středy stejnolehlostí dvou rovnoběžných úseček

PŘÍKLAD 9.3. *Uvažujte variantu předchozího příkladu 9.2, v níž jsou dané úsečky v jedné přímce, viz Obr. 98*

Řešení: Tentokrát nám postup použitý pro řešení příkladu 9.2, kde byly úsečky v obecné poloze, nepomůže. Přímky spojující koncové body úseček spolu splývají.



Obrázek 98: Jak určit středy stejnolehlostí dvou kolineárních úseček?



Obrázek 99: Dané úsečky jako základny stejnolehlých trojúhelníků

Pomůžeme si tím, že si dané úsečky představíme jako součásti nějakých rovinných vzájemně stejnolehlých útvarů, například trojúhelníků, jak vidíme na Obr. 99. Mohou to být ale libovolné vzájemně stejnolehlé útvary, tj. útvary, které jsou podobné a jejichž sobě odpovídající úsečky (například strany n-úhelníku) jsou rovnoběžné. Omezíme-li se na trojúhelníky, z Obr. 99 vidíme, že existují dvě dvojice, které splňují daná kritéria. Je to v souladu s tím, že očekáváme existenci dvou stejnolehlostí, v nichž se jedna úsečka zobrazí na druhou, stejně jako tomu bylo v případě příkladu 9.2. Online verze Obr. 99 je zde https://www.geogebra.org/m/qSQGSZeP.

Koeficient stejnolehlosti vs. dělicí poměr

Vraťme se ještě k definici 12 stejnolehlosti. Vektorovou rovnost (74), která je v ní uvedena, můžeme přepsat do tvaru

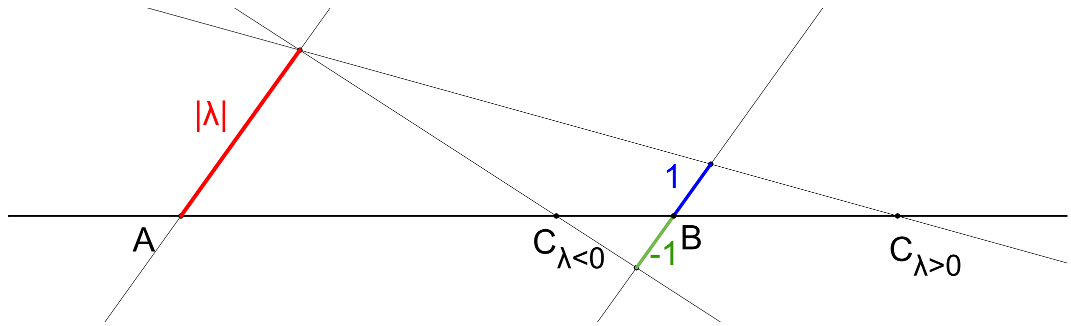
$$X' - S = \kappa(X - S). \tag{75}$$

Porovnáme-li nyní (75) s rovností (2) uvedenou v definicí 26 dělicího poměru, viz str. 15, zjistíme, že vztah mezi vzorem X, obrazem X' a středem S ve stejnolehlosti $\mathcal{H}(S, \kappa)$ se dá jednoduše zapsat pomocí dělicího poměru, platí

$$(X'XS) = \kappa. \tag{76}$$

I takto tedy můžeme definovat stejnolehlost.

PŘÍKLAD 9.4. *Jsou dány dva různé body A, B a reálné číslo $\lambda \neq 0, 1$. Najděte na přímce AB bod C tak, aby platilo $(ABC) = \lambda$.*



Obrázek 100: $(ABC) = \lambda$

Řešení: Viz Obr. 100. Využijeme souvislost mezi dělicím poměrem a koeficientem stejnolehlosti. Online verze je na adrese https://www.geogebra.org/m/fj34fcqh.

9.1 Analytické vyjádření stejnolehlosti

Usilujeme o nalezení rovnice, která by vyjadřovala vztah mezi souřadnicemi vzoru $X[x, y]$ a obrazu $X'[x', y']$ ve stejnolehlosti $\mathcal{H}$ dané středem $S[s_1, s_2]$ a koeficientem $\kappa \neq 0, 1$. Využijeme k tomu vektorovou rovnost $X' - S = \kappa(X - S)$ uvedenou na str. 111 v souvislosti s dělicím poměrem. Z ní úpravami postupně dostaneme nejprve

$$X' = S + \kappa X - \kappa S,$$

potom hledanou rovnici stejnolehlosti $\mathcal{H}(S, \kappa)$:

$$X' = \kappa X + (1 - \kappa)S. \tag{77}$$

Po dosazení souřadnic bodů můžeme (77) psát ve tvaru jedné rovnice

$$[x', y'] = \kappa[x, y] + (1 - \kappa)[s_1, s_2] \tag{78}$$

nebo jako soustavu dvou rovnic

$$\begin{aligned} x' &= \kappa x + (1 - \kappa)s_1, \\ y' &= \kappa y + (1 - \kappa)s_2. \end{aligned} \tag{79}$$

PŘÍKLAD 9.5. *Napište rovnice stejnolehlosti Eukleidovské roviny E_2, která zobrazuje bod $B = [2, 0]$ na bod $C = [0, 1]$ a má koeficient $\kappa = -2$. Najděte souřadnice jejího středu.*

Řešení: Souřadnice bodů B, C jako vzoru a obrazu, spolu s $\kappa = -2$, dosadíme do (79) a řešíme jako rovnice s neznámými s_1 a s_2. Dostaneme řešení $s_1 = \dfrac{4}{3}, s_2 = \dfrac{1}{3}$.

Opět dosadíme do (79), tentokrát však za s_1, s_2 a κ, abychom dostali hledané rovnice příslušné stejnolehlosti

$$\begin{aligned} x' &= -2x + 4, \\ y' &= -2y + 1. \end{aligned}$$

I když je úloha snadno řešitelná ručně, pro zajímavost si uveďme kód jejího řešení v programu wxMaxima:

(% i3) `B:[2,0]$ C:[0,1]$ S:[s1,s2]$`

(% i4) `H:C-S=-2*(B-S);`

$$[-s1, 1 - s2] = [-2\,(2 - s1)\,, 2s2] \tag{H}$$

(% i5) `res:solve(lhs(H)-rhs(H),[s1,s2])[1];`

$$[s1 = \frac{4}{3}, s2 = \frac{1}{3}] \tag{res}$$

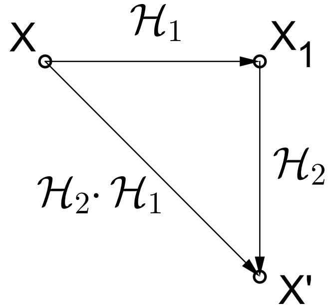
(% i6) `S:ev(S,res);`

$$[\frac{4}{3}, \frac{1}{3}] \tag{S}$$

9.2 Skládání stejnolehlostí

Zajímá nás, jaká zobrazení mohou vzniknout složením dvou stejnolehlostí. Označíme-li je $\mathcal{H}_1$ a $\mathcal{H}_2$, hledáme výsledek jejich složení $\mathcal{H}_2 \circ \mathcal{H}_1$ (a v obráceném pořadí $\mathcal{H}_1 \circ \mathcal{H}_2$), viz Obr. 101. V úvodu této kapitoly os stejnolehlosti jsme na str. 108 zmiňovali skutečnost, že stejnolehlost spolu s identitou, posunutím a středovou souměrností (což je ale vlastně stejnolehlost s koeficientem $\kappa = -1$) tvoří množinu tzv. *homotetií*, zobrazení, v nichž jsou všechny směry samodružné. Množina homotetií, spolu s operací skládání zobrazení, tvoří grupu (viz např. zmínka o *group of dilations or homothety-translations* v článku Wikipedia: Homothetic transformation). Výsledky našeho následujícího zkoumání budou této skutečnosti odpovídat (důkaz zde provádět nebudeme).

Uvažujme dvě stejnolehlosti $\mathcal{H}_1(S_1, \kappa_1)$, $\mathcal{H}_2(S_2, \kappa_2)$ s rovnicemi $\mathcal{H}_1 :\; X' = \kappa_1 X + (1-\kappa_1)S_1$, $\mathcal{H}_2 :\; X' = \kappa_2 X + (1-\kappa_2)S_2$. Jestliže, v duchu Obr. 101, stejnolehlost $\mathcal{H}_1$



Obrázek 101: Skládání zobrazení $\mathcal{H}_1$ a $\mathcal{H}_2$

zobrazuje bod X na X_1 a stejnolehlost $\mathcal{H}_2$ zobrazuje bod X_1 na bod X', můžeme tato zobrazení popsat rovnicemi

$$\mathcal{H}_1(X \longrightarrow X_1) : X_1 = \kappa_1 X + (1-\kappa_1)S_1, \tag{80}$$

$$\mathcal{H}_2(X_1 \longrightarrow X')\, X' = \kappa_2 X_1 + (1-\kappa_2)S_2. \tag{81}$$

Potom pro složené zobrazení $\mathcal{H}_2 \circ \mathcal{H}_1$ platí následující rovnice, která vznikne příslušným složením (80) a (81),

$$\mathcal{H}_2 \circ \mathcal{H}_1(X \longrightarrow X') : X' = \kappa_2(\kappa_1 X + (1-\kappa_1)S_1) + (1-\kappa_2)S_2. \tag{82}$$

Po její úpravě dostáváme konečný tvar rovnice složeného zobrazení $\mathcal{H}_2 \circ \mathcal{H}_1$

$$X' = \kappa_1\kappa_2 X + (1-\kappa_1\kappa_2)S_1 + (1-\kappa_2)(S_2 - S_1), \tag{83}$$

ve kterém lze za uvedených podmínek identifikovat rovnice konkrétních zobrazení:

1. $\underline{\kappa_1\kappa_2 = 1 \wedge S_1 \equiv S_2}$

$$\mathcal{H}_2 \circ \mathcal{H}_1 : X' = X. \tag{84}$$

   Jedná se o *identitu*.

2. $\underline{\kappa_1\kappa_2 = 1 \wedge S_1 \neq S_2}$

$$\mathcal{H}_2 \circ \mathcal{H}_1 : X' = X + (1-\kappa_2)(S_2 - S_1). \tag{85}$$

   Výsledným zobrazením je v tomto případě *posunutí* s vektorem $\vec{p} = (1-\kappa_2)(S_2 - S_1)$.

3. $\underline{\kappa_1\kappa_2 \neq 1 \wedge S_1 \equiv S_2}$

$$\mathcal{H}_2 \circ \mathcal{H}_1 : X' = \kappa_1\kappa_2 X + (1-\kappa_1\kappa_2)S_1. \tag{86}$$

   Tentokrát je výsledným zobrazením *stejnolehlost* se středem $S \equiv S_1 \equiv S_2$ a koeficientem $\kappa = \kappa_1\kappa_2$.

4. $\underline{\kappa_1\kappa_2 \neq 1 \wedge S_1 \neq S_2}$

$$\mathcal{H}_2 \circ \mathcal{H}_1 : \; X' = \kappa_1\kappa_2 X + (1-\kappa_1\kappa_2)\left(S_1 + \frac{1-\kappa_2}{1-\kappa_1\kappa_2}(S_2 - S_1)\right). \tag{87}$$

I v tomto nejobecnějším případě je výsledným zobrazením *stejnolehlost*, tentokrát se středem $S = S_1 + \dfrac{1-\kappa_2}{1-\kappa_1\kappa_2}(S_2 - S_1)$ a koeficientem $\kappa = \kappa_1\kappa_2$. Z poněkud složitého výrazu pro střed S výsledné stejnolehlosti lze vyčíst, že vznikne posunutím bodu S_1 ve směru vektoru $S_2 - S_1$. Střed nové stejnolehlosti tedy leží na přímce spojující středy stejnolehlostí, ze kterých vznikla.

Získané poznatky shrneme do následující věty, výše provedenou analýzou skládání dvou stejnolehlostí již dokázanou.

Věta 11 (O skládání stejnolehlostí). *Složením dvou stejnolehlostí $\mathcal{H}_1(S_1, \kappa_1)$, $\mathcal{H}_2(S_2, \kappa_2)$ vznikne*

1. IDENTITA, jestliže $\kappa_1\kappa_2 = 1$ a $S_1 = S_2$,

2. POSUNUTÍ, jestliže $\kappa_1\kappa_2 = 1$ a $S_1 \neq S_2$,

3. STEJNOLEHLOST $\mathcal{H}(S, \kappa)$ s koeficientem $\kappa = \kappa_1\kappa_2$, jestliže $\kappa_1\kappa_2 \neq 1$. Přitom, pro $S_1 = S_2$ je také $S = S_1 = S_2$, pro $S_1 \neq S_2$ leží bod S na přímce S_1S_2.

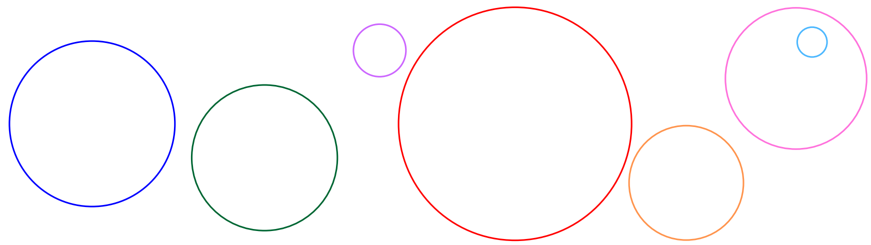
Zcela analogicky, tentokrát zkoumáním rovnice zobrazení složeného ze stejnolehlosti a posunutí, bychom dospěli k potvrzení správnosti tvrzení níže uvedené věty. Tuto činnost již přenecháme laskavému čtenáři jako čistě dobrovolnou.

Věta 12 (O skládání stejnolehlosti a translace). *Zobrazení složené ze stejnolehlosti $\mathcal{H}(S;\kappa)$ a translace $X' = X + \vec{t}$ je stejnolehlost $\mathcal{H}'(Q;\kappa)$, kde $Q = S + \dfrac{1}{1-\kappa}\vec{t}$.*

9.3 Stejnolehlost kružnic

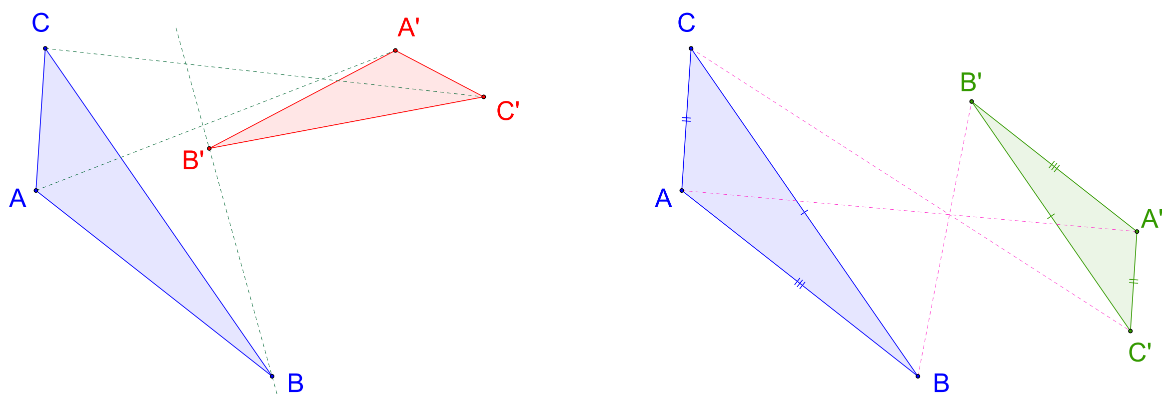
Že mají všechny kružnice stejný tvar, a mohou se lišit jenom svou velikostí, viz Obr. 102, tedy, že všechny kružnice jsou podobné, není nic překvapivého. Jednak je to zřejmé od pohledu, jednak víme, že pro každou kružnici, bez ohledu na její velikost, je poměr obvodu a průměru roven π.

Stejně přirozenou, ale možná méně zřejmou, je skutečnost, že *každé dvě kružnice jsou stejnolehlé*. U ostatních tvarů nelze předpokládat, že podobnost s sebou automaticky přináší i stejnolehlost. Viz například trojúhelníky na Obr. 103. Obě zobrazené



Obrázek 102: Kružnice jsou podobné

dvojice trojúhelníků ΔABC a $\Delta A'B'C'$ představují dvojice podobných trojúhelníků (konkrétně s koeficientem $k = 0,7$), přitom jenom dvojice vpravo je zároveň i dvojicí stejnolehlých trojúhelníků (sobě odpovídající úsečky jsou rovnoběžné).

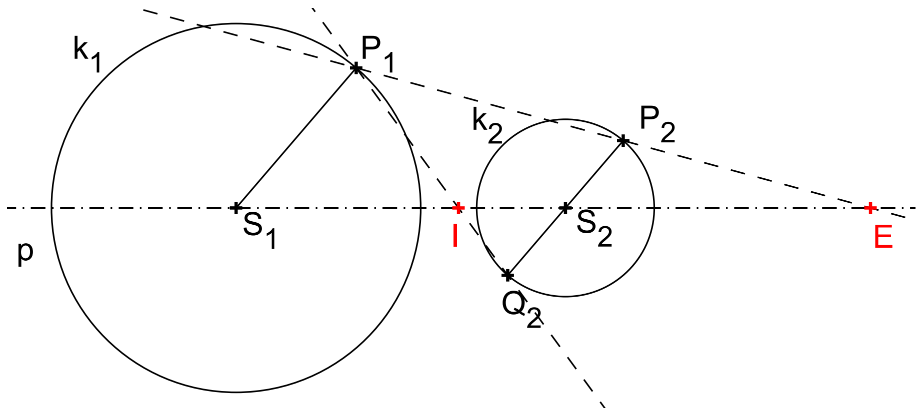


Obrázek 103: Ne každá dvojice podobných trojúhelníků je stejnolehlá

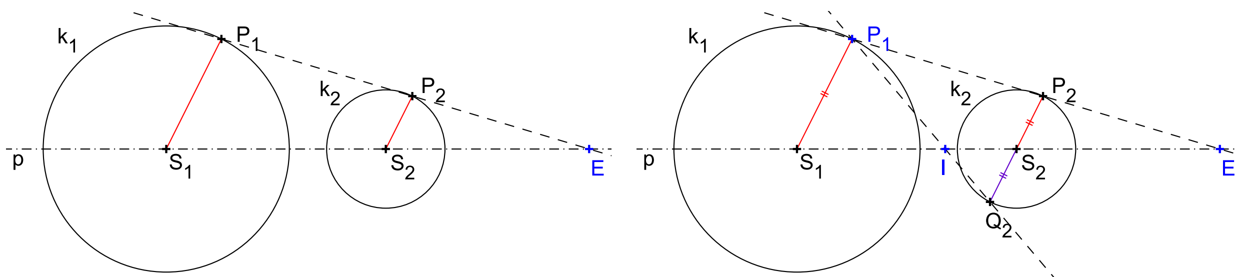
Pro dvě kružnice $k_1(S_1; r_1)$ a $k_2(S_2; r_2)$ s různými poloměry, viz Obr. 104, existují právě dvě stejnolehlosti, které převádějí kružnici k_1 do kružnice k_2: $\mathcal{H}_1(E, r_2/r_1)$ a $\mathcal{H}_2(I, -r_2/r_1)$. Přitom E se nazývá *vnější (externí) střed stejnolehlosti* a I se nazývá *vnitřní (interní) střed stejnolehlosti*. Jestliže se kružnice dotýkají v bodě T, potom v případě jejich vnějšího dotyku je $T = I$ a v případě jejich vnitřního dotyku je $T = E$.

PŘÍKLAD 9.6. *Jsou dány dvě kružnice $k_1(S_1, r_1)$, $k_2(S_2, r_2)$, které mají různé poloměry, nejsou soustředné (tj. $r_1 \neq r_2$, $S_1 \neq S_2$) a nemají žádný společný bod. Najděte středy a koeficienty stejnolehlostí, v nichž se jedna z nich, řekněme k_1, zobrazuje na druhou, k_2.*

Řešení: Využijeme postup, který jsme uplatnili při řešení příkladu 9.2. Hledání středů stejnolehlostí dvou kružnic převedeme na hledání středů stejnolehlostí dvou úseček. Samozřejmě se musí jednat o úsečky, mezi kterými je vztah stejnolehlosti ustaven stejným zobrazením, jako u kružnic. Použijeme vzájemně rovnoběžné poloměry daných kružnic, viz Obr. 105. Nejprve dvojici ležící v souhlasné polorovině



Obrázek 104: Stejnolehlost kružnic

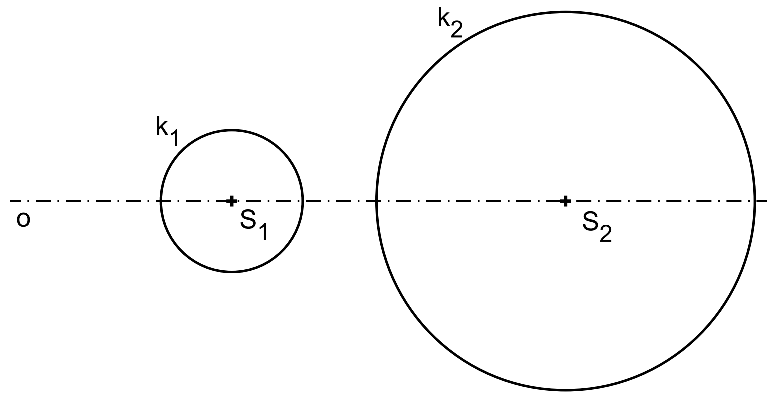


Obrázek 105: Určete středy stejnolehlostí daných kružnic

vzhledem k S_1S_2, viz Obr. 105, vlevo, potom u jedné z kružnic přidáme poloměr ležící v opačné polorovině, viz Obr. 105, vpravo. Přímky P_1P_2 a P_1Q_2 spojující jejich krajní body náležející kružnicím svými průsečíky s přímkou S_1S_2 určují hledané středy stejnolehlostí E a I. Mohli bychom pracovat i s rovnoběžnými průměry, ale protože víme, že hledané středy stejnolehlostí těch kružnic musí, s ohledem na symetrii, ležet na spojnici středů, poloměry stačí (můžeme ale argumentovat i tím, že střed každé z kružnic je jedním z krajních bodů jejího poloměru uvažovaného jako úsečka). Středy uvažovaných stejnolehlostí jsme našli, zbývá tedy určit ještě koeficienty těchto stejnolehlostí. Uvažujeme-li, že k_1 se zobrazí na k_2, poměr jejich podobnosti je $k = \dfrac{r_2}{r_1}$. Stejnolehlost $\mathcal{H}_1$ se středem E bude mít koeficient stejný, tj. $\kappa_1 = \dfrac{r_2}{r_1}$, stejnolehlost $\mathcal{H}_2$ se středem I bude mít ale koeficient opačný, tj. $\kappa_2 = -\dfrac{r_2}{r_1}$.

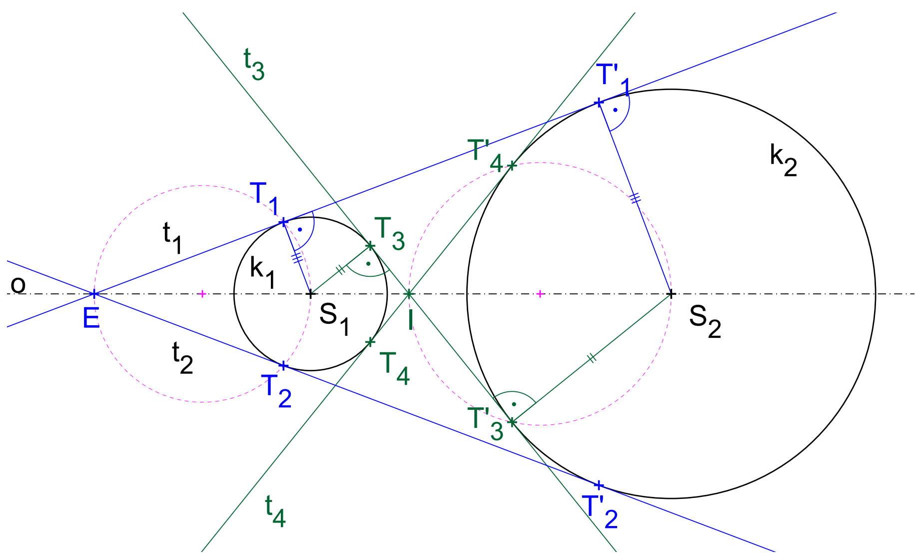
PŘÍKLAD 9.7. *Jsou dány dvě nesoustředné kružnice $k_1(S_1, r_1)$, $k_2(S_2, r_2)$ o různých poloměrech r_1, r_2, viz Obr. 106. Sestrojte jejich společné tečny!*

Řešení: Klíčem k řešení této úlohy je poznatek, že společné tečny dvou kružnic procházejí středy jejich stejnolehlostí. Dvě nesoustředné kružnice v poloze naznačené Obr. 106 mají čtyři společné tečny, dvě vnější, jejichž společným bodem je vnější střed stejnolehlosti kružnic E, a dvě vnitřní, se společným bodem ve vnitřním středu



Obrázek 106: Sestrojte společné tečny daných kružnic

stejnolehlosti I. Že společné tečny kružnic musejí procházet středy jejich stejnolehlostí, lze vysvětlit uplatněním postupu řešení příkladu 9.6. Z Obr. 107 je patrné, že společné tečny dvojice kružnic jsou vlastně přímky spojující koncové body dvojic rovnoběžných poloměrů těchto kružnic, analogicky s řešením příkladu 9.6, akorát výjimečných tím, že jsou na tyto přímky kolmé.



Obrázek 107: Společné tečny daných kružnic procházejí středy I, E jejich stejnolehlostí

Společné tečny dvojice kružnic tedy sestrojíme tak, že nejprve najdeme středy E, I stejnolehlostí, v nichž se jedna z kružnic zobrazuje na druhou. To provedeme postupem představeným v řešení příkladu 9.6. Potom z těchto bodů sestrojíme tečny ke kružnicím. *Sestrojení tečny z bodu ke kružnici* je klasická úloha využívající Thaletovu větu, která se vyskytuje v učivu matematiky pro základní i střední školu. Thaletovy kružnice jesou v Obr. 107 naznačeny růžovými přerušovanými čarami.

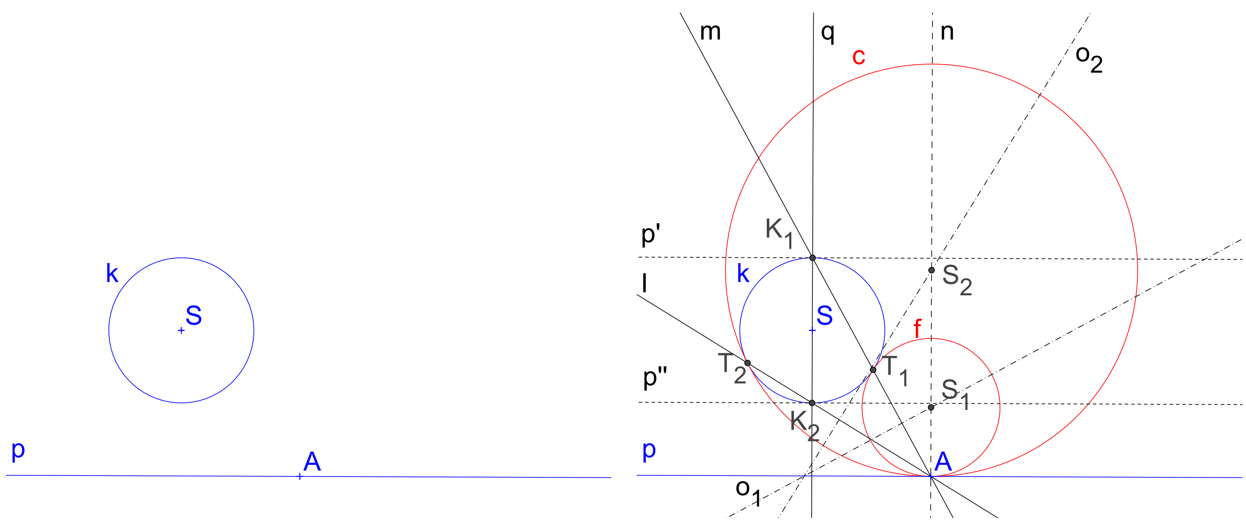
Následující příklady patří do kategorie tzv. Apolloniových[21] úloh. Původním *Apolló-*

[21] Apollónios z Pergy, 3.–2. stol. př. n. l., řecký geometr a astronom

niovým problémem[22] je úkol *sestrojit všechny kružnice, které se dotýkají tří daných kružnic*. Postupem času se v zadání jako kružnice začaly uznávat i body a přímky, protože bod můžeme chápat jako kružnici s nulovým poloměrem a přímku naopak jako kružnice s nekonečně velkým poloměrem. V současnosti se Apolloniovou úlohou rozumí úkol sestrojit kružnici, která se dotýká tří objektů, které mohou být vybrány z množiny tří typů objektů $\{$*kružnice, bod, přímka*$\}$. Existuje tak celkem deset[23] typů Apolloniovy úlohy, tři z nich si nyní představíme.

PŘÍKLAD 9.8. *Je dána kružnice k, přímka p, která je vnější přímkou kružnice k, a bod $A \in p$. Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají přímky p v bodě A a kružnice k.*

Řešení: Zadání a řešení viz Obr. 108. Je zřejmé, že body dotyku hledaných kružnic a dané kružnice k jsou středy jejich stejnolehlostí. Díky tomu je najdeme. Víme, že musí ležet na k a zároveň, dle vlastnosti stejnolehlosti č. 1 (viz str. 109), jimi musí procházet přímky spojující vzory a obrazy v příslušných stejnolehlostech. Teď už stačí jenom si uvědomit, že bodu A odpovídají v daných stejnolehlostech postupně body K_1 a K_2, které umíme sestrojit. Pak už je postup jasný. Konstrukce krok za krokem viz https://www.geogebra.org/m/d9KBGDAj. Úloha má dvě řešení, jednu kružnici s vnějším dotykem s k, druhou s vnitřním dotykem s k.



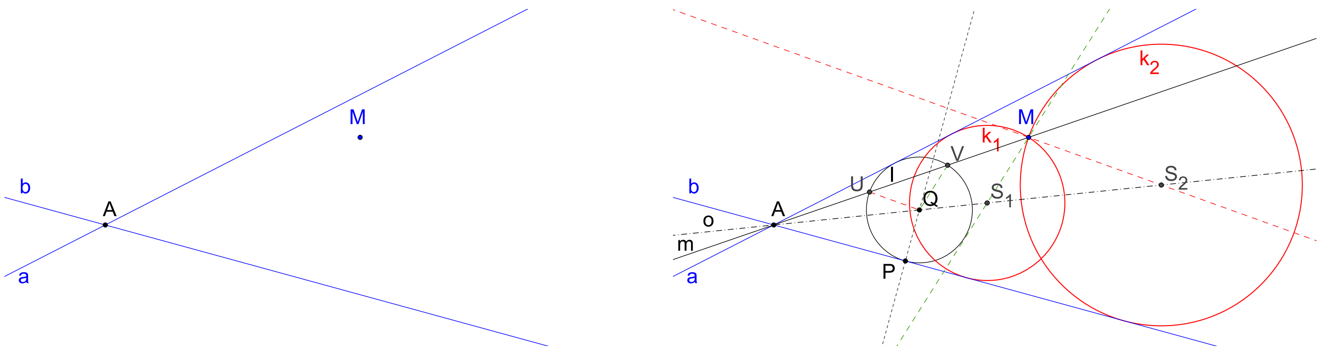
Obrázek 108: Apollóniova úloha bod-přímka-kružnice, vlevo zadání, vpravo řešení

PŘÍKLAD 9.9. *Jsou dány dvě různoběžky a, b a bod M, který leží uvnitř jednoho jejich úhlu. Sestrojte všechny kružnice, které procházejí bodem M a dotýkají se přímek a, b.*

[22] Viz Wikipedia: Problem of Apollonius

[23] Odpověď na otázku „Proč 10?“ přenechávám laskavému čtenáři jako zajímavou kombinatorickou úlohu.

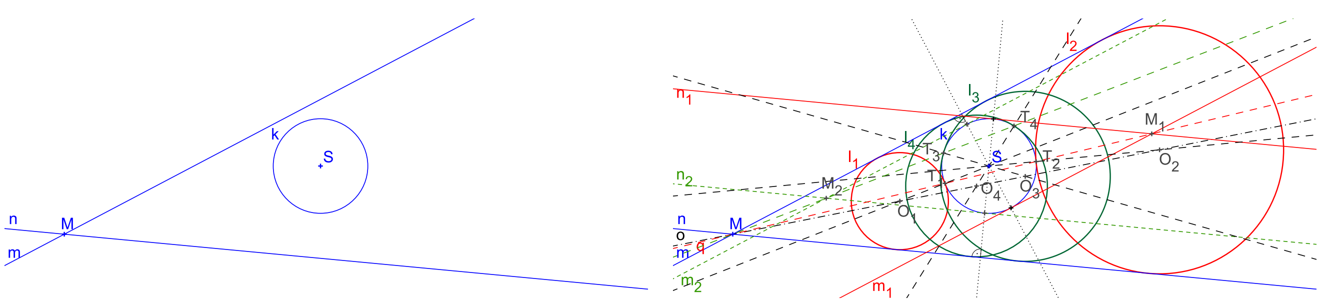
Řešení: Viz Obr. 110. Víme, že společné tečny dvojice kružnic procházejí středy jejich stejnolehlostí. Všechny kružnice, které se dotýkají dvou různoběžek jsou stejnolehlé ve stejnolehlostech, jejichž středem je průsečík různoběžek, v našem případě bod A. Tuto znalost středu stejnolehlosti náležitě využijeme. Sestrojíme si libovolnou „pomocnou“ kružnici, která se bude také dotýkat daných různoběžek, viz kružnice l. Na ní musí ležet obraz (nebo vzor, záleží, v jakém směru zobrazení uvažujeme) bodu M ve stejnolehlosti se středem A. Stačí sestrojit přímku $m =\leftrightarrow AM$ a najít její průsečíky s l, body U, V. Ty spojíme se středem Q pomocné kružnice. Obrazy (vzory) těchto poloměrů s nimi musí být rovnoběžné (viz vlastnost stejnolehlosti č. 3 na str. 109) a musí mít jako jeden krajní bod bod M a jako druhý krajní bod středn hledané kružnice S_1, resp. S_2. Sestrojíme proto rovnoběžky s úsečkami QU a QV jdoucí bodem M. Jejich průsečíky S_1, S_2 s osou různoběžek o jsou potom středy hledaných kružnic. Konstrukce krok za krokem viz https://www.geogebra.org/m/CSW7xumC. Úloha má dvě řešení.



Obrázek 109: Apollóniova úloha bod-přímka-kružnice, vlevo zadání, vpravo řešení

PŘÍKLAD 9.10. *Jsou dány dvě různoběžky m, n a kružnice k ležící uvnitř jednoho jejich úhlu. Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají přímek m, n i kružnice k.*

Řešení: Viz Obr. 110. Protože hledáme kružnice, které se dotýkají dané kružnice k,

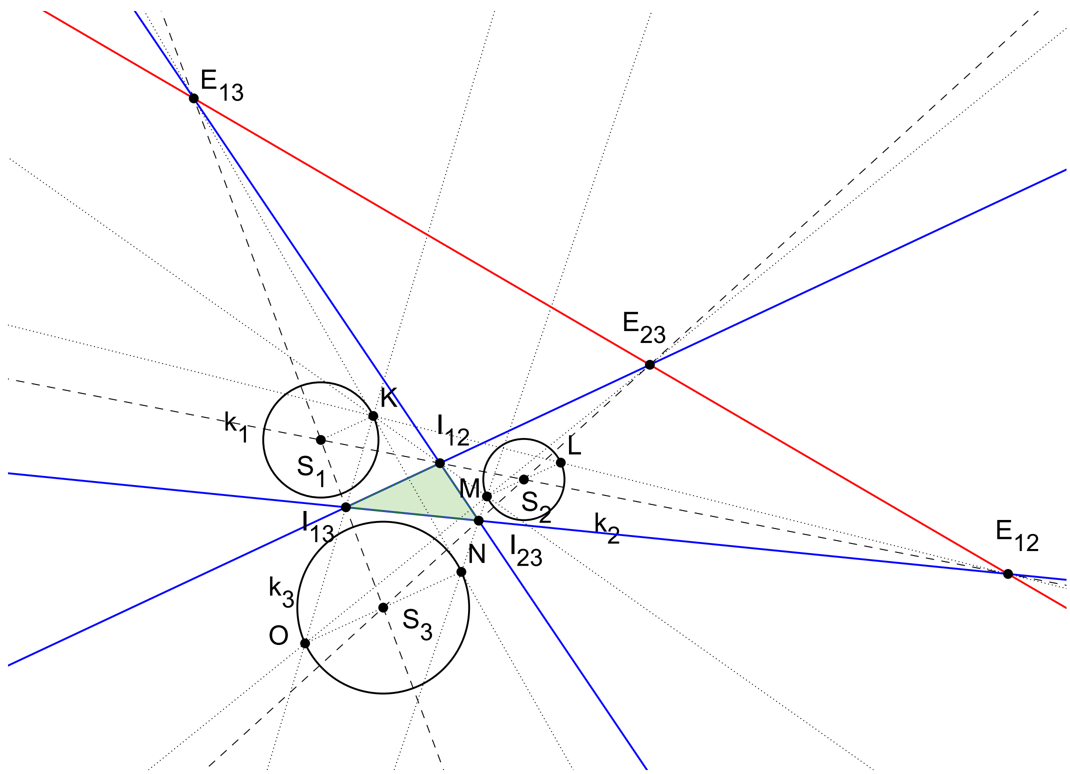


Obrázek 110: Apollóniova úloha bod-přímka-kružnice, vlevo zadání, vpravo řešení

budeme stejně jako při řešení příkladu 9.8 pracovat se stejnolehlostmi, jejichž středy jsou (nám dosud neznámé) body dotyku. Nalezení těchto bodů je klíčem k řešení úlohy. Opět využijeme vlastnost stejnolehlosti č. 1 (viz str. 109), která říká, že vzor, obraz a střed leží v jedné přímce. Stačí uvědomit si, že hledané kružnice mají jako tečny dané přímky m, n. Jejich obrazy v uvažovaných stejnolehlostech musí být zase tečnami, tentokrát kružnice k, a musí být rovnoběžné s m nebo n. Přitom průsečík tečen m, n, bod M, se zobrazí na průsečík obrazů těchto tečen, bod M_1, resp. M_2. Postup nalezení bodů dotyku hledaných kružnic s k je tedy na světě. Sestrojíme tečny k rovnoběžné s m, n a průsečíky jejich dvojic, body M_1, M_2 spojíme přímkami s M. Průsečíky těchto přímek s k budou hledané body dotyku T_1, T_2, T_3, T_4. Další postup je zřejmý. Konstrukce krok za krokem viz https://www.geogebra.org/m/tccEujny. Úloha má čtyři řešení, dvě kružnice s vnějším dotykem s k (na Obr. 110 jsou to červené kružnice), dvě s vnitřním dotykem s k (na Obr. 110 jsou to zelené kružnice).

9.4 Mongeova věta

Jsou-li dány tři různé kružnice v rovině, vnitřní a vnější středy příslušející každým dvěma z nich jsou dohromady spjaty zajímavými geometrickými vztahy, viz Obr. 111. Ty jsou předmětem *Mongeovy věty*. Věta je připisována francouzskému matematikovi *Gaspardu Mongeovi*, který položil základy deskriptivní geometrie.



Obrázek 111: Mongeova věta o třech kružnicích v rovině

Věta 13 (Mongeova věta). *Jsou-li k_1, k_2, k_3 tři kružnice, které mají různé poloměry a jejichž středy neleží v přímce, platí pro vnější a vnitřní středy stejnolehlostí každých* *dvou z nich následující vztahy:*

i) Všechny tři vnější středy stejnolehlosti E_{12}, E_{13}, E_{23} leží v přímce.

ii) Každé dva vnitřní středy stejnolehlosti a jeden vnější leží v přímce.

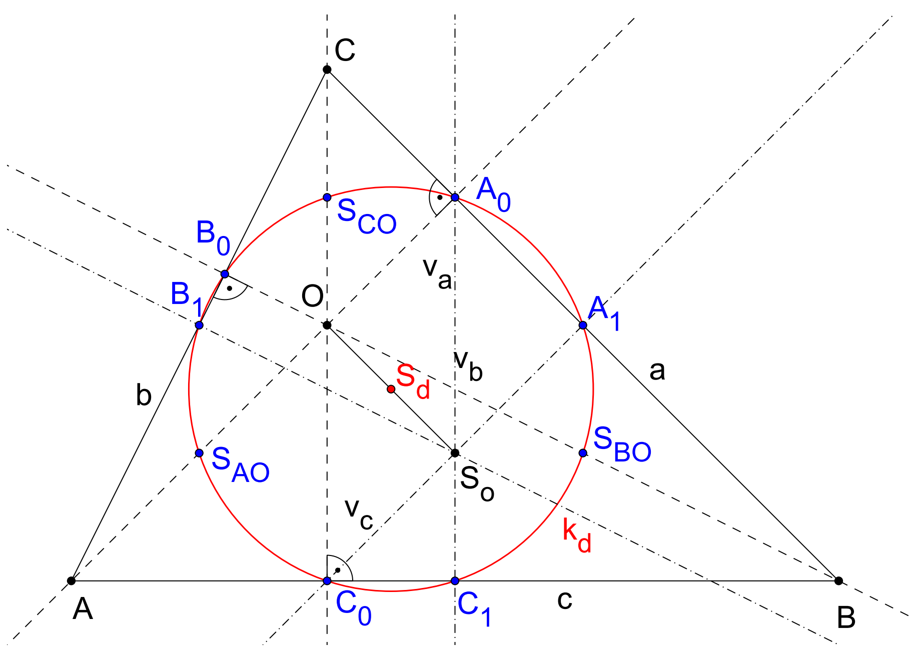
iii) Tři vnitřní středy stejnolehlosti I_{12}, I_{13}, I_{23} neleží v přímce.

Důkaz. V důkazu využijeme tvrzení věty 11, že složením stejnolehlostí s různými středy vznikne pro $\kappa_1\kappa_2 \neq 1$ stejnolehlost, jejíž střed leží na přímce určené středy těchto stejnolehlostí. Pak už stačí mezi danými třemi kružnicemi najít tři stejnolehlosti takové, že jedna z nich je složením zbývajících dvou. Dynamický GeoGebra aplet k důkazu je na adrese `https://www.geogebra.org/m/osR9mHs8`. □

9.5 Kružnice devíti bodů

V této a v následující kapitole si představíme dvě spolu související věty týkající se zajímavých vlastností trojúhelníku. Kromě zjevné souvislosti jejich obsahů mají společné i to, že k důkazu každé z nich lze efektivně využít stejnolehlost.

Věta 14 (Kružnice devíti bodů). *V trojúhelníku ABC označme O průsečík výšek, S_o střed kružnice opsané, C_1, A_1, B_1 středy stran AB, BC a CA. Jestliže k_d je kružnice procházející body A_1, B_1 a C_1, potom na ni leží také paty A_0, B_0, C_0 výšek v_a, v_b, v_c a středy úseček AO, BO, CO. Střed kružnice k_d je středem úsečky S_oO, její poloměr je roven polovině poloměru kružnice trojúhelníku ABC opsané.*



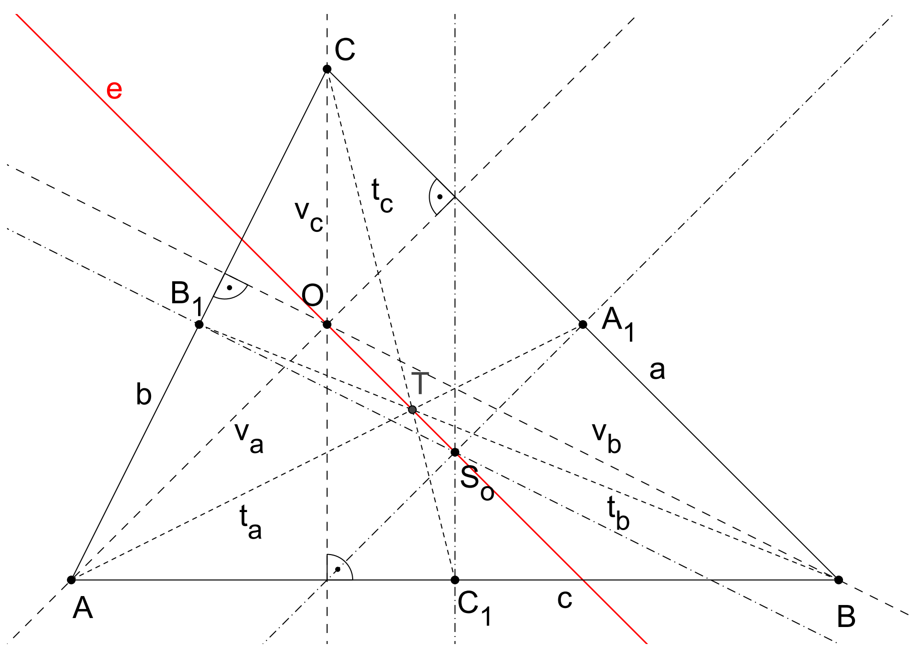
Obrázek 112: Kružnice devíti bodů

Ve větě uvedená kružnice se nazývá *kružnice devíti bodů* (též *Feuerbachova*[24] či *Eulerova*[25] *kružnice*), viz Obr. 112.

Konstrukce kružnice devíti bodů a její souvislost s Eulerovou přímkou (viz str. 123) je znázorněna v apletu *„Eulerova přímka. Kružnice devíti bodů."*

9.6 Eulerova přímka

Věta 15 (Eulerova přímka). *V trojúhelníku ABC označme T těžiště, O průsečík výšek a S_o střed kružnice trojúhelníku opsané. Potom buď všechny tyto tři body splývají v jediný, nebo jsou navzájem různé a leží na společné přímce tak, že platí $(S_oOT) = -\frac{1}{2}$. Tuto přímku nazýváme Eulerova přímka, viz Obr. 113.*

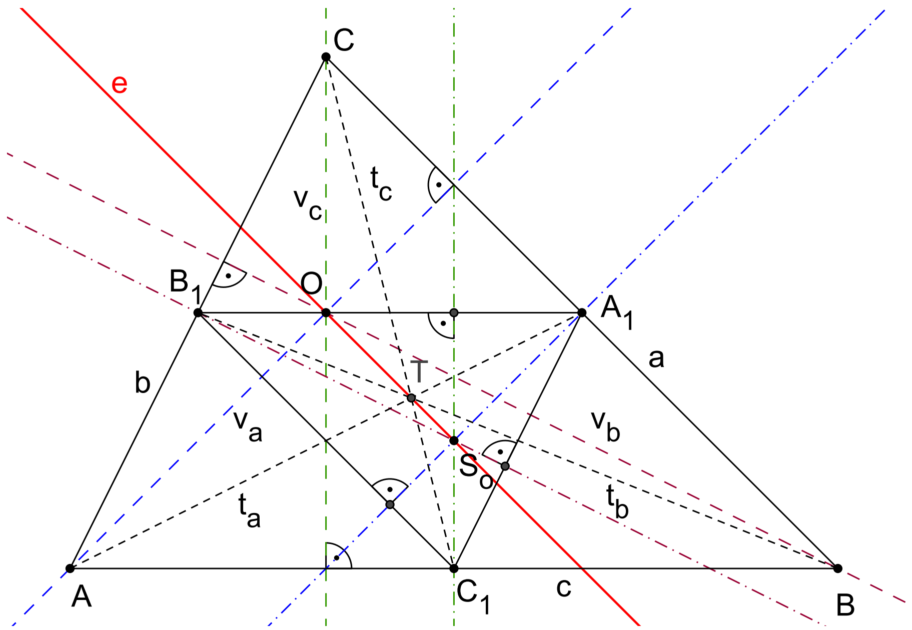


Obrázek 113: Eulerova přímka

Důkaz. K důkazu výše uvedeného tvrzení využijeme stejnolehlost $\mathcal{H}\left(T, -\frac{1}{2}\right)$. Z Obr. 114 je patrné, že v této stejnolehlosti se $\triangle ABC$ zobrazí na $\triangle A_1B_1C_1$. Protože výškami (výšky teď chápeme jako přímky) $\triangle A_1B_1C_1$ jsou osy stran původního $\triangle ABC$, můžeme říci, že výšky trojúhelníku ABC se ve stejnolehlosti $\mathcal{H}\left(T, -\frac{1}{2}\right)$ zobrazí na osy jeho stran. Potom se ale průsečík výšek O zobrazí na průsečík os stran

[24] *Karl Wilhelm Feuerbach*, 1800–1834, německý matematik, bratr filozofa *Ludwiga Feuerbacha*.

[25] *Leonhard Euler*, 1707–1783, švýcarský matematik s přesahy do dalších disciplín, považovaný za jednoho z největších a nejvšestrannějších matematiků historie této vědy.



Obrázek 114: $\mathcal{H}\left(T, -\frac{1}{2}\right) : \triangle ABC \to \triangle A_1B_1C_1$

(tj. střed kružnice opsané $\triangle ABC$) S_o. Z vlastností stejnolehlosti plyne, že příslušné tři body O, S_o, T leží v přímce a platí pro ně $(S_oOT) = -\frac{1}{2}$. $\square$

Konstrukce Eulerovy přímky a její souvislost s kružnicí devíti bodů (viz str. 122) je znázorněna v apletu *„Eulerova přímka. Kružnice devíti bodů.“*

9.7 Podobnosti eukleidovské roviny

Zde zakončíme svou exkurzi do světa podobností v rovině. Uvedeme si, že spolu s operací skládání geometrických zobrazení tvoří grupu a naznačíme si klasifikaci podobností roviny v duchu klasifikace shodností roviny na str. 92, s využitím rovnic (67), (68) pro přímou a nepřímou shodnost, které jsou tam uvedeny.

Grupa podobností roviny
Množina všech podobností eukleidovského prostoru E_2 spolu s operací skládání tvoří grupu - tzv. *grupu podobností prostoru* E_2 (též *grupu podobností roviny*).

Důkazem uvedeného tvrzení se zabývat nebudeme. Je však zřejmé, že plyne z toho, co následuje.

Na str. 102 je uvedena věta 9, která říká, že každé podobné zobrazení eukleidovské roviny do sebe lze složit ze *stejnolehlosti* a *shodnosti.* Tuto skutečnost nyní, spolu s analytickým vyjádřením přímé a nepřímé shodnosti, viz str. 92, a analytickým vyjádřením stejnolehlosti, viz str. 112, využijeme k tomu, abychom popsali rovnicemi i podobnost v rovině.

Ze skutečnosti, že *každou podobnost v rovině lze složit ze stejnolehlosti a shodnosti*, získáme rovnice podobnosti následujícím způsobem.

1. Stejnolehlost $\mathcal{H}$ volíme pro jednoduchost se středem v počátku soustavy souřadnic a s koeficientem $\kappa > 0$ (připomeňme si, že střed stejnolehlosti můžeme při rozkladu podobnosti volit libovolně):

$$\mathcal{H} : X \mapsto \overline{X}; \quad \begin{aligned} \overline{x} &= kx \\ \overline{y} &= ky. \end{aligned}$$

2. Shodnost $\mathcal{Z}$ (která je výše zmíněnou volbou stejnolehlosti určena jednoznačně) je buď přímá nebo nepřímá, platí tedy jedna ze sad rovnic (67), (68):

$$\mathcal{Z} : \overline{X} \mapsto X'; \quad \begin{aligned} x' &= \overline{x}\cos\alpha \mp \overline{y}\sin\alpha + p \\ y' &= \overline{x}\sin\alpha \pm \overline{y}\cos\alpha + q. \end{aligned}$$

Výsledkem složení $\mathcal{Z} \circ \mathcal{H}$ je potom *přímá* nebo *nepřímá podobnost.* Rovnice pro oba případy jsou přehledně uvedeny v následující tabulce. Kromě tvarů s goniometrickými funkcemi sinus a kosinus jsou použity i tvary s parametry a, b na místech koeficientů.

Přímá podobnost	**Nepřímá podobnost**
$x' = kx\cos\alpha - ky\sin\alpha + p$ $y' = kx\sin\alpha + ky\cos\alpha + q.$	$x' = kx\cos\alpha + ky\sin\alpha + p$ $y' = kx\sin\alpha - ky\cos\alpha + q.$
$x' = ax - by + p$ $y' = bx + ay + q.$	$x' = ax + by + p$ $y' = bx - ay + q.$

Na str. 26 jsme si uvedli kritérium (31) pro rozhodnutí, zda je daná afinita shodností. Pro matici A soustavy rovnic příslušné afinity musí platit $A^T \cdot A = E$. Zajímá nás, zda se podobným způsobem dá identifikovat také podobnost. Jak poznáme, že afinita daná rovnicí $X' = A \cdot X + B$ je podobností? Vzhledem k evidentní souvislosti mezi podobností a shodností v rovině, která je naznačena výše uvedenými rovnicem, je zřejmé, že aby uvažovaná afinita byla podobností, musí platit

$$A^T \cdot A = \begin{bmatrix} k^2 & 0 \\ 0 & k^2 \end{bmatrix} = k^2 \cdot E, \tag{88}$$

kde $|k|$ je koeficientem této podobnosti.

Vztah mezi podobnostmi a shodnostmi, dosud vyjádřený složením stejnolehlosti a shodnosti, se dá popsat ještě detailněji, konkretizací shodností, které připadají v úvahu. O tom hovoří následující věta, kterou zde uvádíme bez důkazu.

Věta 16. *Každá vlastní podobnost eukleidovské roviny je buď stejnolehlost, nebo stejnolehlost složená s otočením kolem středu stejnolehlosti, nebo stejnolehlost složená s osovou souměrností, jejíž osa prochází středem stejnolehlosti.*

9.8 Cvičení: Stejnolehlost. Podobnost.

1. Do půlkruhu s průměrem AB vepište čtverec $KLMN$ tak, aby strana KL ležela na úsečce AB a další dva vrcholy M, N na dané půlkružnici.

2. Je dána přímka p, kružnice k a bod A. Sestrojte všechny úsečky XY tak, aby platilo: $X \in p$, $Y \in k$, $A \in XY$, $|AY| = 3|AX|$.

3. Jsou dány dvě různoběžky a, b a kružnice k tak, že a je sečnou a b je vnější přímkou kružnice k. Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají přímek a, b i kružnice k.

4. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno:

a) $v_a = 5cm$, $a : b : c = 2 : 3 : 4$,

b) α, β, v_c,

c) α, β, t_c,

d) $a : b = 3 : 5$, $\gamma = 60°$, $t_c = 6\,\text{cm}$.

5. Určete p tak, aby existovala stejnolehlost se středem $[3, 2]$, zobrazující bod $[1, 4]$ na bod $[2, p]$. Napište rovnice této stejnolehlosti.

6. Je dána kružnice k a bod M uvnitř této kružnice. Sestrojte všechny tětivy kružnice, které jsou bodem M rozděleny na části v poměru $2 : 3$.

7. Narýsujte libovolný trojúhelník ABC. Uvnitř strany AC sestrojte bod X a uvnitř strany BC bod Y tak, aby platilo $|AX| = |XY|$ a $XY \parallel AB$.

8. Najděte všechny podobnosti euklidovské roviny, při kterých se bod $[1, 0]$ zobrazí na bod $[4, -2]$ a bod $[2, 3]$ na bod $[2, -8]$.

9. Najděte podobnost euklidovské roviny, při které se zobrazí počátek na bod $[0, 2]$, bod $[1, 1]$ na počátek a bod $[2, 0]$ na bod $[2, p]$. Určete p a najděte samodružné body a směry nalezené podobnosti.

10. Najděte rovnice podobnosti, při které je počátek samodružný a obrazem bodu $[5, -3]$ je bod $[1, 1]$.

11. Určete všechny podobnosti, pro které jsou bod $[1, 1]$ a směr vektoru $(1, 1)$ samodružné.

12. Napište rovnice všech podobností zobrazujících body $[1, 2]$ a $[0, 1]$ po řadě na body $[3, -1], [4, 2]$. Rozložte je na stejnolehlost a shodnost.

13. V rovině je dán čtverec $ABCD$ se středem S. Určete obraz bodu C v podobnosti, která zobrazuje body A, B, S po řadě na body B, D, C. Určete samodružný bod této podobnosti.

14. Je dána kružnice k a bod A, který je bodem vnější oblasti kružnice k. Sestrojte všechny sečny kružnice k, které procházejí bodem A a pro jejichž průsečíky X, Y s kružnicí platí $|AX| = 2|AY|$.

15. Je dána kružnice $k(S; 4cm)$, její tečna t a bod $M \in k$ tak, že $|Mt| = 2cm$. Sestrojte úsečku XY procházející bodem M tak, aby $X \in k, Y \in t$ a $|MX| : |MY| = 3 : 2$.

16. Jsou dány dvě různoběžky a, b a kružnice k tak, že $P \in a \cap b$ je bodem vnitřní oblasti kružnice k. Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají přímek a, b i kružnice k.