PŘÍKLAD 3.1. *Maticovou rovnicí ve tvaru (4) zapište tyto afinity: (i) osová souměrnost podle osy y, (ii) středová souměrnost podle počátku, (iii) Středová souměrnost se středem v bodě $[0, 5]$. Využijte: tube.geogebra.org/student/mUcqvE9uT*

Věta 2 (O určenosti afinity v rovině)**.** *Nechť K, L, M a K', L', M' jsou dvě skupiny nekolineárních bodů v rovině. Pak existuje jediná afinita f této roviny, která body K, L, M zobrazuje v daném pořadí na body K', L', M'.*

Důkaz. Využijeme (3). Afinita f musí být dána takovýmito rovnicemi. Ukážeme, že za podmínek uvedených ve větě je tato afinita určena jednoznačně, tj. existuje jediná šestice $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$, která tuto afinitu specifikuje.

Pro jednotlivé dvojice bodů „vzor $\to$ obraz" dostaneme následující rovnice:

$K[k_1, k_2] \to K'[k'_1, k'_2]$:

$$a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + b_1 = k'_1, \tag{5}$$

$$a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + b_2 = k'_2. \tag{6}$$

$L[l_1, l_2] \to L'[l'_1, l'_2]$:

$$a_{11}l_1 + a_{12}l_2 + b_1 = l'_1, \tag{7}$$

$$a_{21}l_1 + a_{22}l_2 + b_2 = l'_2. \tag{8}$$

$M[m_1, m_2] \to M'[m'_1, m'_2]$:

$$a_{11}m_1 + a_{12}m_2 + b_1 = m'_1, \tag{9}$$

$$a_{21}m_1 + a_{22}m_2 + b_2 = m'_2. \tag{10}$$

Pro známé souřadnice bodů K, L, M, K', L', M' tak máme soustavu 6 rovnic o 6 neznámých $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$. Zajímá nás, za jakých podmínek má jediné řešení. Tyto podmínky by se měly shodovat s obsahem věty 2. Po detailním prozkoumání rovnic (5)–(10) je patrné, že jejich soustava se dá rozdělit na dvě vzájemně nezávislé soustavy 3 rovnic o 3 neznámých: soustavu rovnic (5), (7) a (9) o neznámých a_{11}, a_{12}, b_1 a soustavu rovnic (6), (8) a (10) o neznámých a_{21}, a_{22}, b_2. Přitom první z těchto soustav má rozšířenou matici

$$\left[\begin{array}{ccc|c} k_1 & k_2 & 1 & k'_1 \\ l_1 & l_2 & 1 & l'_1 \\ m_1 & m_2 & 1 & m'_1 \end{array}\right], \tag{11}$$

druhá má potom rozšířenou matici

$$\left[\begin{array}{ccc|c} k_1 & k_2 & 1 & k'_2 \\ l_1 & l_2 & 1 & l'_2 \\ m_1 & m_2 & 1 & m'_2 \end{array}\right]. \tag{12}$$

Soustavy se tedy shodují v matici soustavy (liší se pouze vektory pravých stran). Aby měly obě soustavy jediné řešení, musí být determinant této matice různý od nuly, tj.

$$\begin{vmatrix} k_1 & k_2 & 1 \\ l_1 & l_2 & 1 \\ m_1 & m_2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{13}$$

Determinant v (13) snadno spočítáme eliminací jedniček na pozicích $(2,3)$ a $(3,3)$ postupným odečtením prvního řádku od druhého a třetího řádku a následným rozvojem takto upraveného determinantu podle třetího sloupce. Dostaneme tak podmínku

$$\begin{vmatrix} l_1 - k_1 & l_2 - k_2 \\ m_1 - k_1 & m_2 - k_2 \end{vmatrix} \neq 0, \tag{14}$$

která je splněna právě tehdy, když jsou vektory $L - K$ a $M - K$ nezávislé, tj. body K, L, M neleží v přímce.

Teď zbývá dokázat, že když body K, L, M neleží v přímce, ani body K', L', M' nemohou ležet v přímce. Tentokrát využijeme maticovou rovnici afinity $X' = A \cdot X + B$. Pro uvedené dvojice bodů platí:

$$K' = A \cdot K + B, \tag{15}$$

$$L' = A \cdot L + B, \tag{16}$$

$$M' = A \cdot M + B. \tag{17}$$

Důkaz provedeme sporem. Předpokládáme, že K, L, M neleží v přímce a zároveň body K', L', M' leží v přímce. Potom existuje $j \in R$ takové, že $L' - K' = j(M' - K')$. Po dosazení z (15)–(17) a vynásobení obou stran rovnice zleva maticí inverzní k A dostaneme $L - K = j(M - K)$, což je spor s předpokladem nekolineárnosti bodů K, L, M. Body K', L', M' tedy také nemohou ležet v přímce.

□