Soustavy lineárních rovnic

Při řešení soustav lineárních rovnic využijeme tyto balíčky funkcí:
`linalg`,
`LinearAlgebra` (nová alternativa balíčku `linalg`, který je již zastaralý),
`Student[LinearAlgebra]`.

1. Je dána soustava lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} 64w - 57x + 97y - 67z &= 485 \\ 92w + 77x - 34y - 37z &= 486 \\ 44w - 34x + 53y - 34z &= 465 \\ 27w + 57x - 69y + 29z &= 464 \end{aligned}$$

a) Ověřte splnění Frobeniovy podmínky.
b) Soustavu vyřešte užitím inverzní matice.
c) Pomocí Cramerova pravidla určete hodnotu neznámé y.

Maple

Přímé řešení:

```
> r1:=64*w-57*x+97*y-67*z=485; r2:=92*w+77*x-34*y-37*z=486; r3:=44*w-34*x+53*y-34*z
=465; r4:=27*w+57*x-69*y+29*z=464;
> Res:=solve({r1,r2,r3,r4},{w,x,y,z});
```

Pořadí neznámých v zápise řešení je náhodné a nemusí odpovídat našim představám. Zápisu ve tvaru uspořádané čtveřice `[w,x,y,z]` dosáhneme příkazem:

```
> eval([w,x,y,z],Res);
```

Ověření řešitelnosti (Frobeniova podmínka):
Rozšířenou matici `Aroz`, matici soustavy `A` i vektor pravých stran `b` vygenerujeme příkazy:

```
> Aroz:=linalg[genmatrix]({r1,r2,r3,r4},[w,x,y,z],flag);
> A:=linalg[genmatrix]({r1,r2,r3,r4},[w,x,y,z],b);
```

Poznámka: Opakem příkazu `genmatrix` je `geneqns`.
Hodnost matice `A` zjistíme příkazem `linalg[rank](A);`
Gaussovu eliminaci provedeme příkazem `linalg[gausselim](A);`, **Gauss-Jordanovu eliminaci** příkazem `linalg[gaussjord](A);`. Eliminaci můžeme provádět i krok za krokem, například užitím příkazu „`pivot`".

Řešení regulární soustavy užitím inverzní matice:
Řešení soustavy $AX = b$ je rovno součinu $X = A^{-1}b$. **Inverzní matice** k matici `A` získáme příkazem `inverse(A);`. Součin matic A^{-1}, b můžeme zadat dvojím způsobem:
`> evalm(inverse(A)&*b);` nebo `linalg[multiply](inverse(A),b);`

Cramerovo pravidlo
Determinant matice A určíme příkazem `linalg[det](A);` Matice A_1, A_2, A_3, A_4 vytvoříme pomocí příkazů `submatrix`, `augment`, případně `swapcol` knihovny `linalg`.
Poznámka: Pokud používáme více příkazů z nějaké knihovny, vyplatí se jí otevřít příkazem „`with`", v našem případě `with(linalg);`. Potom výpočet matice A_2 provedeme jedním z následujících způsobů:
`> A2:=augment(submatrix(A,1..4,[1]),b,submatrix(A,1..4,[3,4]));` nebo
`> A2:=submatrix(swapcol(Aroz,2,5),1..4,1..4));`

2. Řešte následující soustavy a jejich řešení graficky znázorněte:

$$a)\quad \begin{aligned} x + 3y + z &= 5 \\ 2x + y + z &= 2 \\ x + y + 5z &= -7 \end{aligned} \qquad\qquad b)\quad \begin{aligned} x + 3y + z &= 5 \\ 2x + y + z &= 2 \\ x - 2y &= -7 \end{aligned}$$

Maple

Rovnice pojmenujeme `r1, r2, r3` a některým z výše uvedených způsobů vyřešíme. Řešení soustavy znázorníme dvěma způsoby: 1. užitím knihovny `plots` a 2. užitím knihovny `Student[LinearAlgebra]`, která je „podknihovnou“ rozsáhlé knihovny `Student`, určené k podpoře výuky úvodních kurzů vysokoškolské matematiky.

1. Užitím `plots`

```
> with(plots):
> R1:=implicitplot3d(r1,x=-5..5,y=-5..5,z=-5..5,color=red,style=patchnogrid):
> R2:=implicitplot3d(r2,x=-5..5,y=-5..5,z=-5..5,color=blue,style=patchnogrid):
> R3:=implicitplot3d(r3,x=-5..5,y=-5..5,z=-5..5,color=green,style=patchnogrid):
> display(R1,R2,R3,axes=box);
```

2. Užitím `Student[LinearAlgebra]`

```
> Student[LinearAlgebra][LinearSystemPlot]({r1,r2,r3});
```

3. Řešte následující soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 &= -2 \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 - 5x_4 - x_5 &= 3 \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_5 &= 3 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 5x_5 &= 2 \\ -2x_1 - x_2 + 11x_3 - 12x_4 - x_5 &= 7 \end{aligned}$$

Maple

Obecné řešení nehomogenní soustavy

Místo balíčku `linalg` použijeme balíček `LinearAlgebra`. Má-li soustava nekonečně mnoho řešení, což zjistíme ověřením Frobeniovy podmínky, umožňuje příkaz „`LinearSolve`" z tohoto balíčku (nebo z balíčku `Student[LinearAlgebra]`) zápis těchto řešení užitím zvolených parametrů.

```
> A,b:=LinearAlgebra[GenerateMatrix]([r1,r2,r3,r4,r5],[x1,x2,x3,x4,x5]);
> Aroz:=LinearAlgebra[GenerateMatrix]([r1,r2,r3,r4,r5],[x1,x2,x3,x4,x5],augmented=true);
> LinearAlgebra[Rank](A);LinearAlgebra[Rank](Aroz);
> LinearAlgebra[LinearSolve](A,b,free='t');
```

Problém 1

Užitím příkazu „`linsolve`" z balíčku `linalg` nebo „`LinearSolve`" z balíčku `LinearAlgebra` řešte tyto maticové rovnice s neznámou maticí X (Pracujte s nápovědou):

$$a)\ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -3 \\ 4 & 5 & -3 \\ 3 & 3 & -2 \end{bmatrix}, \qquad b)\ X \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \\ 1 & -4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Problém 2

Jeníček a Mařenka hrají hru, při níž střídavě vyplňují čísly mezery v následující soustavě:

$$\begin{aligned} \_\,x + \_\,y + \_\,z &= 0 \\ \_\,x + \_\,y + \_\,z &= 0 \\ \_\,x + \_\,y + \_\,z &= 0. \end{aligned}$$

Mařenka začíná a vyhraje tehdy, když bude mít výsledná soustava nenulové řešení. Najděte vyhrávací strategie pro Mařenku i Jeníčka, pokud existují.