Algebraické rovnice a jejich soustavy

Příklad 1

Řešte následující soustavy rovnic. Řešení znázorněte graficky:

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \\
x^2 + z^2 &= y \\
x &= z
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
x^3 &= xyz + \frac{5}{8} \\
y^3 &= xyz - \frac{1}{2} \\
z^3 &= xyz + \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

Maple

Uvedené soustavy se dají vyřešit různě (pokuste se o ruční řešení nebo o přímé řešení v Maple užitím `solve`).

I. My si na nich nejprve ukážeme použití metody tzv. Groebnerovy báze, která umožňuje eliminaci proměnných při řešení soustav algebraických rovnic vyšších řádů (můžeme si ji představit jako zobecnění Gaussovy eliminace na soustavy rovnic vyšších řádů, více viz např. `http://mathworld.wolfram.com/GroebnerBasis.html`).

Rovnice převedeme do podoby mnohočlenů a pojmenujeme obvyklým způsobem:

```
> r1:=x^2+y^2+z^2-1; r2:=x^2+z^2-y; r3:=x-z;
```

Potom načteme do paměti balíček `Groebner`

```
> with(Groebner):
```

a použijeme příkaz `gbasis`:

```
> GB:=gbasis([r1,r2,r3],tdeg(x,y,z));
```

Parametr `tdeg(x,y,z)` určuje uspořádání členů jednotlivých výsledných polynomů, v tomto případě se jedná o „graded reverse lexicographic order“. Další hojně využívaný způsob uspořádání je `plex(x,y,z)`. Všechny typy uspořádání implementované v Maple najdeme v nápovědě `?Groebner[termorder]` (pro Maple 11 pak `?MonomialOrders`).

II. Eliminaci neznámých můžeme provést rovnou příkazem `eliminate`.

```
> e1:=eliminate({r1,r2,r3},x);
> e2:=eliminate(e1[2],y);
> solve(e2[2],z);
```

Příklad 2

Předpokládejme, že neznámé a, b, c splňují následující rovnice:

$$
\begin{aligned}
a + b + c &= 3, \\
a^2 + b^2 + c^2 &= 5, \\
a^3 + b^3 + c^3 &= 7.
\end{aligned}
$$

Určete hodnoty výrazů $a^4 + b^4 + c^4$, $a^5 + b^5 + c^5$ a $a^6 + b^6 + c^6$.

Maple

I. Řešení užitím Groebnerovy báze:

```
> with(Groebner);
> GB:=gbasis({r1,r2,r3},plex(a,b,c));
```

Hodnotu výrazu $a^4 + b^4 + c^4$ označíme x a příslušný mnohočlen uložíme do `r4`:

```
> r4:=a^4+b^4+c^4-x;
```

Příkazem `reduce` zjistíme zbytek při vyjádření `r4` jako kombinace `r1`, `r2` a `r3` (pseudodělení). Jedná se o výraz s proměnnou x, jejíž hodnotu určíme tak, aby byl zbytek roven nule:

```
> reduce(r4,GB,plex(a,b,c),'s1');
```

Analogicky naložíme s dalším výrazem:

```
> r5:=a^5+b^5+c^5-y;
> reduce(r5,GB,plex(a,b,c),'s2');
```

II. Řešení užitím příkazu `eliminate`:

Rovnice napíšeme ve tvaru $x = a + b + c$, $y = a^2 + b^2 + c^2$, $z = a^3 + b^3 + c^3$, $w = a^4 + b^4 + c^4$ a postupně z nich eliminujeme neznámé `a`, `b`, `c`. Zbyde nám `w` vyjádřeno pomocí `x`, `y` a `z`.

```
> e1:=eliminate({x=a+b+c,y=a^2+b^2+c^2,z=a^3+b^3+c^3,w=a^4+b^4+c^4},a);
> e2:=eliminate(e1[2],b);
> e3:=eliminate(e2[2],c);
> wres:=solve(e3[2],w);
> assign(wres);
> subs(x=3,y=5,z=7,w);
```

Příklad 3

V **rovině** jsou dány přímky $p = [P; \vec{u}]$, $q = [Q; \vec{v}]$, $r = [R; \vec{w}]$. Najděte rovnostranný trojúhelník ABC tak, aby $A \in p$, $B \in q$, $C \in r$. Určete všechna řešení.

Maple

Úloha vede na dvě rovnice o třech neznámých. K eliminaci jedné neznámé použijeme metodu rezultantů, konkrétně můžeme použít příkaz `resultant`.

Problém 1

V **trojrozměrném prostoru** jsou dány přímky $p = [P; \vec{u}]$, $q = [Q; \vec{v}]$, $r = [R; \vec{w}]$. Najděte rovnostranný trojúhelník ABC tak, aby $A \in p$, $B \in q$, $C \in r$. Určete všechna řešení.