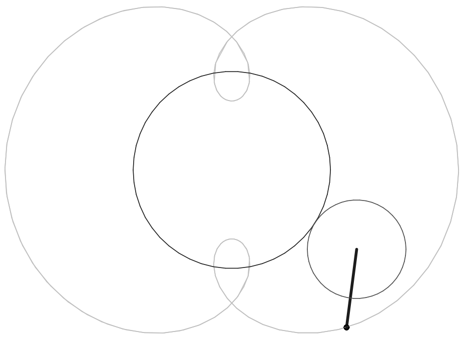
Rovinné křivky

CYKLOIDY

Trajektorii bodu pevně spojeného s kružnicí ve vzdálenosti d od jejího středu, která se odvaluje po jiné kružnici nebo přímce, nazýváme **cykloida**. Podle toho, zda je d menší, rovno nebo větší než poloměr r odvalující se kružnice, hovoříme o **zkrácené**, **prosté** nebo **prodloužené** cykloidě. Při odvalování po jiné kružnici o poloměru R rozlišujeme **epicykloidu**, **pericykloidu** a **hypocykloidu** podle vzájemné polohy pevné a odvalující se kružnice. Pokud obě kružnice leží v opačných polorovinách určených jejich společnou tečnou, hovoříme o epicykloidě. Pokud leží obě kružnice ve stejné polorovině a odvalující se kružnice je vně pevné, hovoříme o pericykloidě. Leží-li odvalující se kružnice uvnitř pevné, nazýváme křivku hypocykloidou. Pro některé cykloidy se vžily zvláštní názvy. Například epicykloida s parametry $R = r, d > r$ se nazývá **prodloužená Pascalova závitnice**. Známá je též **asteroida**, což je vlastně hypocykloida s parametry $r = R/4, d = r$.

Úkol: Zobrazte výše uvedené cykloidy. Nejprve se zaměřte na odvalování po přímce, to je jednodušší. Pokuste se provést animaci odvalování.



Obrázek 1: Epicykloida, $R = 10, r = 5, d = 8$

Maple

Při řešení takovýchto úloh je výhodné použít **homogenní souřadnice**. Rovinné transformace jsou v nich totiž reprezentovány čtvercovými maticemi typu $(3, 3)$. Skládání transformací pak odpovídá násobení těchto matic. Začneme proto definicí matic rotace `Rev(`α`)` a posunutí `T(t1,t2)`. Víme, že cykloida je trajektorie bodu A pevně spojeného s odvalující se kružnicí ve vzdálenosti d od jejího středu. Dostaneme ji tak, že na bod A ve výchozí poloze $A = \langle 1, d, 0\rangle$ působíme transformacemi (tj. násobíme maticemi), které popisují jeho pohyb. Naším úkolem je tyto transformace sestavit z matic `Rev(`α`)` a `T(t1,t2)`.

```
> Rev:=alpha->matrix([[1,0,0],[0,cos(alpha),-sin(alpha)],[0,sin(alpha),
> cos(alpha)]]);
```

$$Rev := \alpha \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

```
> T:=(t1,t2)->matrix([[1,0,0],[t1,1,0],[t2,0,1]]);
```

$$T := (t1,\, t2) \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t1 & 1 & 0 \\ t2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> A:=vector([1,d,0]);
```

$$A := [1,\, d,\, 0]$$

TRAKTRIX

Páníček venčí pejska na vodítku konstantní délky a. Zastihli jsme je v situaci, kdy páníček stojí na okraji chodníku (osa x) a pejsek je plně zaujat zkoumáním objektu, který je vzdálen na plnou délku vodítka (a) kolmo od chodníku (bod $[0, a]$ na ose y). Pánovi došla trpělivost a jal se pokračovat v procházce (podél osy x). Pejsek nehodlá spolupracovat a tak je smýkán násilím. **Jaká bude jeho trajektorie? Najděte její rovnici a zobrazte ji**. (*Pozn.:* Tento problém poprvé publikoval Gottfried Wilhelm Leibniz v 17. století)

Maple - kompletní kód řešení

```
> restart;
> Rovnice:=(y(x)/diff(y(x),x))^2+y(x)^2=a^2:
> Reseni:=[dsolve(Rovnice,y(x))]:
> Reseni:=simplify(Reseni,symbolic):
> ResPocPodm:=subs({x=0,y(x)=a},Reseni):
> C:=map(v->solve(v,_C1),ResPocPodm):
> Tr1:=simplify(subs(_C1=C[1],Reseni[1])):
> Tr2:=simplify(subs(_C1=C[2],Reseni[2])):
> a:=15: #délka vodítka
> Tr10:=eval(Tr1,y(x)=y); Tr20:=eval(Tr2,y(x)=y);
```

$$Tr10 := x - \sqrt{-y^2 + 225} + 15\ln(15 + \sqrt{-y^2 + 225}) - 15\ln(y) = 0$$

$$Tr20 := x + \sqrt{-y^2 + 225} - 15\ln(15 + \sqrt{-y^2 + 225}) + 15\ln(y) = 0$$

```
> Tr1g:=plots[implicitplot](Tr10,x=-15..0,y=-1..15):
> Tr2g:=plots[implicitplot](Tr20,x=0..15,y=-1..15):
> plots[display](Tr1g,Tr2g,scaling=constrained);
```

ŘETĚZOVKA

Kabel elektrického vedení je mezi dvěma sloupy vzdálenými od sebe 100 metrů prověšen o 10 metrů. **Jak dlouhý je kabel** mezi těmito dvěma sloupy? *Nápověda:* Tvar ohebného vlákna volně zavěšeného mezi dvěma body je popsán křivkou zvanou „řetězovka“ (angl. „catenary“), jež má rovnici (*Pozn.:* Otázku rovnice této křivky poprvé nastolil Jakob Bernoulli.):

$$y = \frac{\cosh(\alpha x)}{\alpha}.$$

Maple

Až najdete přesný tvar rovnice funkce popisující prověšení elektrického kabelu (funkci jsem nazval $Cat(x)$), délka kabelu se spočítá pomocí určitého integrálu. Vyzkoušejte posloupnost příkazů:

```
> Delka:=Int(sqrt(1+diff(Cat(x),x)^2),x=-50..50);
> value(Delka);
```

Tipy: V Maple 9.5 je uživateli k dispozici **matematický slovník** s několika tisíci hesel. Více se dozvíte po zadání příkazu

```
> ?Mathematical Dictionary
```

Pro analýzu průběhu funkce je možno využít nástroje z knihovny `Student`. Vyzkoušejte:

```
> with(Student[Calculus1]):
> CurveAnalysisTutor(cosh(x));
```