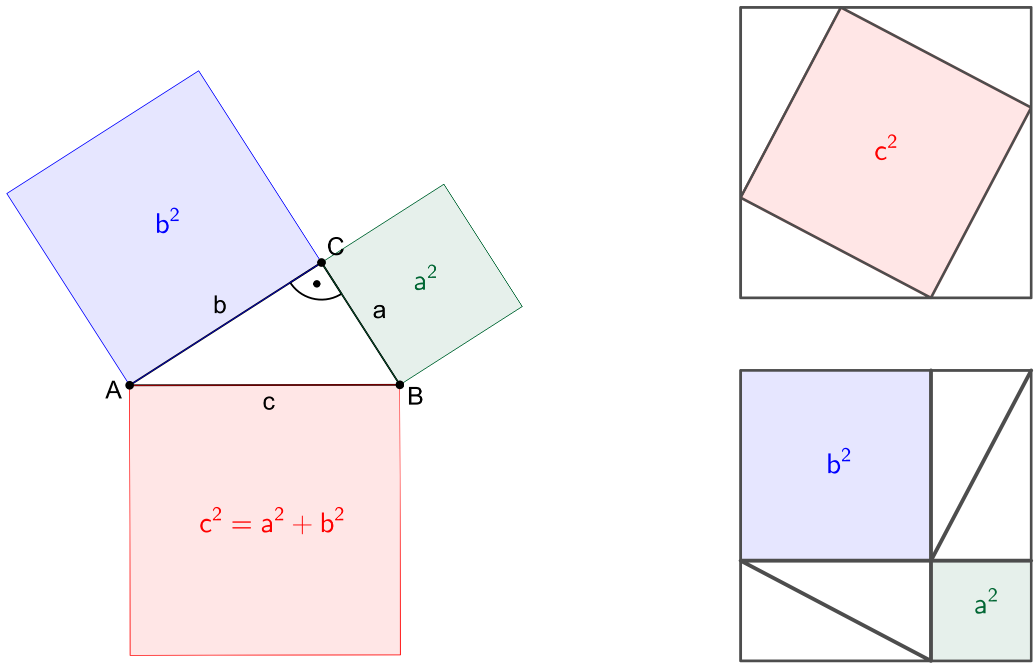
1 Počátky geometrie

Slovo „geometrie“ je řeckého původu, v originále $\gamma\varepsilon\omega\mu\varepsilon\tau\rho\iota\alpha$, kde znamená doslova „měření Země“ (*geo-* je „Země“, *-metron* pak „měření“). Odráží skutečnost, že se geometrie zrodila v Mezopotámii (první prameny pocházejí z doby kolem 3000 př. n. l.) a v Egyptě jako umění vyměřování polí a základů staveb a určování objemů různých schránek na obchodované zboží.

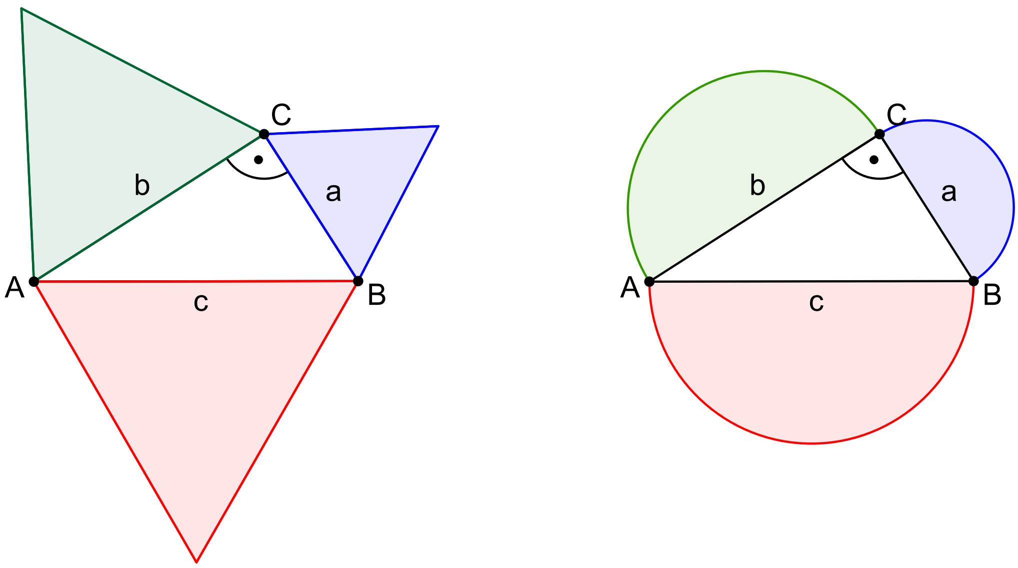
Z potřeb praxe tak v těchto civilizacích například vzešla, zhruba 1500 let před Pythagorem, znalost vztahu mezi stranami pravoúhlého trojúhelníku, kterou dnes nazýváme „Pythagorova věta“. Přitom se jedná o vlastnost stále užitečnou, se vztahem k moderní matematice a souvislostmi s jejími dalšími oblastmi.

Věta 1 (Pythagorova věta)**.** *V pravoúhlém trojúhelníku je obsah čtverce sestrojeného nad přeponou roven součtu obsahů čtverců sestrojených nad oběma odvěsnami. (Pythagoras ze Samu, 570?–510 př. n. l.)*



Obrázek 1: Pythagorova věta (vlevo) a její „důkaz beze slov“ (vpravo)

PŘÍKLAD 1.1. *Platí stejné tvrzení o součtu obsahů i pro jiné vzájemně podobné útvary sestrojené nad přeponou a odvěsnami pravoúhlého trojúhelníku? Například pro půlkruhy nebo trojúhelníky?*



Obrázek 2: Platí tvrzení o součtu obsahů i pro rovnostranné trojúhelníky, půlkruhy a jiné obrazce?

PŘÍKLAD 1.2. *Najděte co nejvíce trojic přirozených čísel (seřazených dle velikosti od nejmenšího), které odpovídají délkám stran pravoúhlého trojúhelníku.*

Trojice čísel, které jsou řešením dané úlohy, tvoří tzv. „pythagorejské trojice" (též hovoříme o „pythagorejských číslech"). Některé takovéto trojice a, b, c (kde $a^2 + b^2 = c^2$) lze vygenerovat pomocí vztahů: $a = m^2 - n^2, b = 2mn, c = m^2 + n^2$.

Předchozí příklad můžeme interpretovat tak, že hledáme řešení rovnice

$$x^2 + y^2 = z^2$$

s neznámými x, y, z v oboru kladných celých čísel (přirozených čísel $1, 2, \dots$). Otázkou řešení této rovnice pro mocniny neznámých vyšší než 2 se zabývá „Velká Fermatova věta" (*Pierre de Fermat*, 1607–1665)

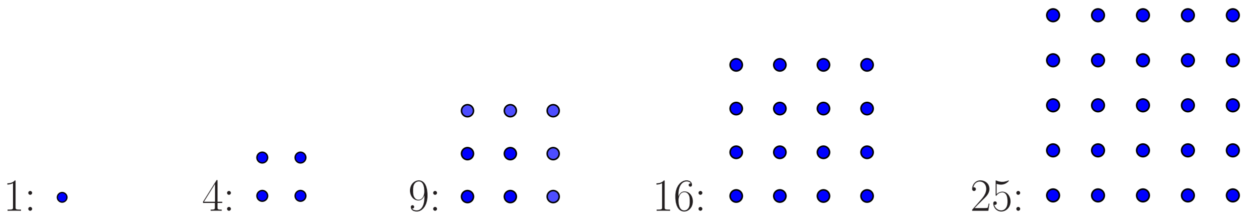
Věta 2 (Velká Fermatova věta)**.** *Rovnice $x^n + y^n = z^n$ nemá žádná kladná celočíselná řešení pro n větší než* 2*.*

Úplný důkaz věty předložil v roce 1995 *Andrew Wiles*.

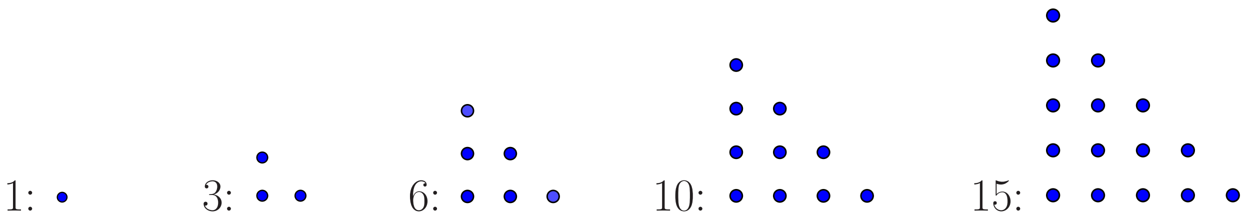
Figurální čísla

Zkoumání pythagorejských trojic nás může přivést ke „čtvercovým číslům“, která jsou příkladem tzv. „figurálních čísel“. Figurálními čísly nazýváme přirozená čísla, jejichž hodnota se dá znázornit nějakým geometrickým tvarem (trojúhelník, čtverec, pětiúhelník apod.).

Čtvercová čísla



Trojúhelníková čísla



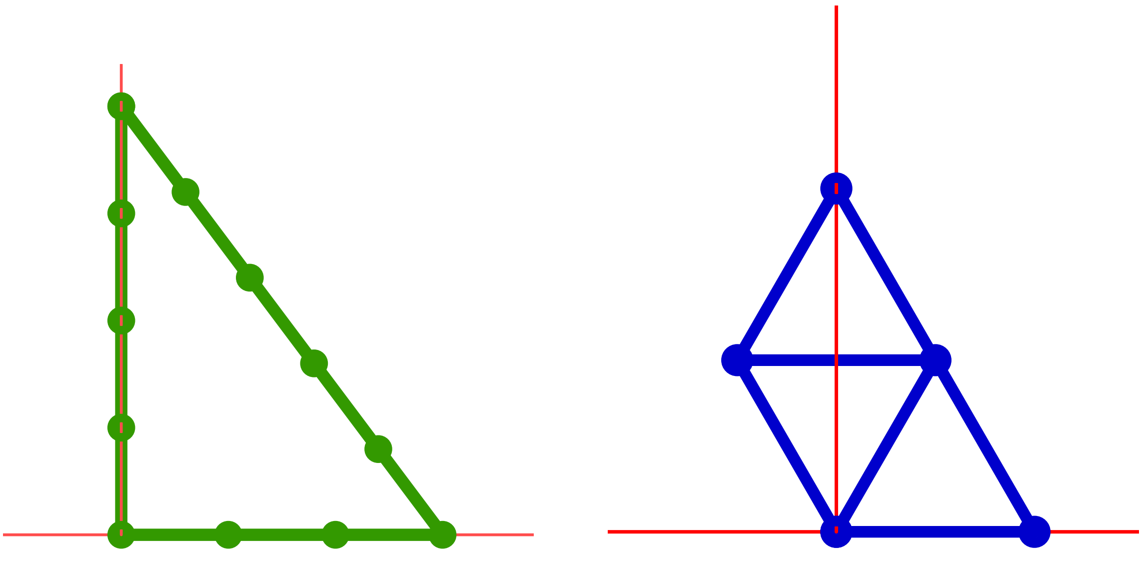
PŘÍKLAD 1.3. *Pokuste se najít vztahy pro výpočet $n-$tého čtvercového a trojúhelníkového čísla. Odhalíte nějaký vztah mezi trojúhelníkovými a čtvercovými čísly (stačí ta, která jsou zde zobrazena).*

Geometrii v původním slova smyslu praktikovali tzv. *napínači provazů*, kteří dokázali měřit tyto čtyři velikosti: **délku**, **plošný obsah**, **objem** a **velikost úhlu** [3].

Egypt

Obrázek 3: Egyptští napínači provazů na malbě z roku kolem 1400 př. n. l.
`https://www.pinterest.co.uk/Jorgeariasrios/ancient-egypt-painting/`

Vlastnost pravoúhlého trojúhelníku, která je podstatou Pythagorovy věty, znali již ve ve starověkém Egyptě. Byla tam využívána k vytyčování pravého úhlu v terénu. Například při stavbě Cheopsovy pyramidy někdy kolem roku 2600 př. n. l.



Obrázek 4: Metoda vytýčení pravého úhlu používaná Egypťany (vlevo) a Mayi (vpravo)

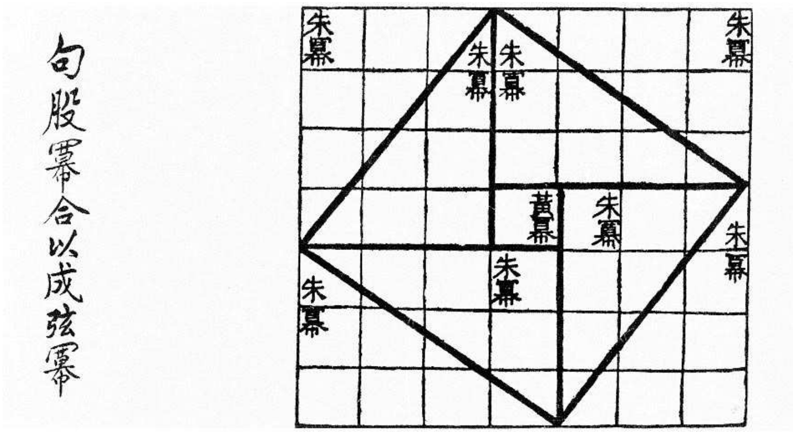
Mezopotámie

Rovněž v Mezopotámii byla vlastnost z Pythagorovy věty známa dávno před tím, než ji Pythagoras dokázal, jak dokládá „žákovská“ hliněná tabulka na Obr. 5, na které je klínovým písmem a v šedesátkové číselné soustavě zaznamenán výpočet délky úhlopříčky čtverce se stranou 30 jednotek.

Obrázek 5: Výpočet úhlopříčky čtverce o straně 30, $u = 30\sqrt{2}$; Mezopotámie, 19.–18. stol. př. n. l., `http://ipch.yale.edu`

Čína

Nejstarší dochovaný důkaz Pythagorovy věty však pochází z Číny.



Obrázek 6: Nejstarší „důkaz beze slov“ Pythagorovy věty; Čína, mezi 1000 a 200 př. n. l., `https://en.wikipedia.org/wiki/Zhoubi Suanjing`

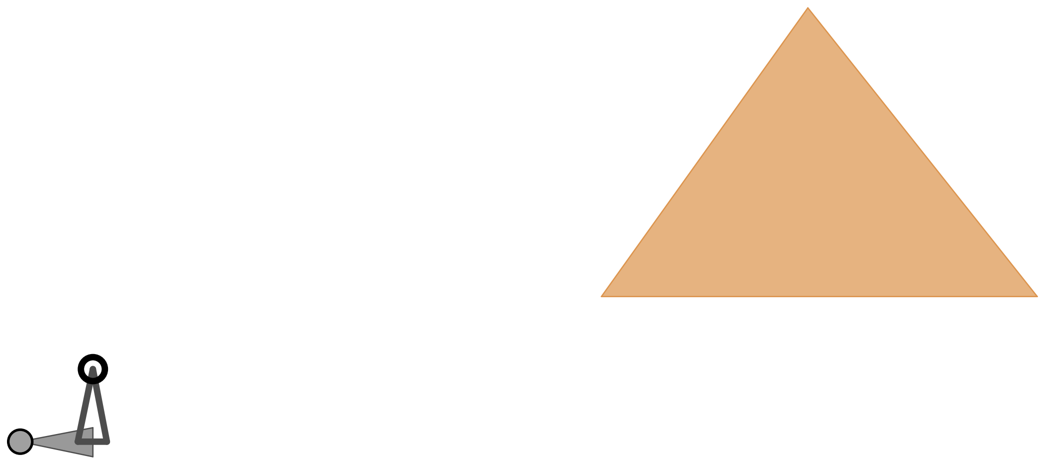
2 Řecká geometrie

Egyptské matematické poznatky byly shromažďovány především pomocí metody pokus-omyl. Kritériem přijetí metody výpočtu bylo to, zda funguje v uvažované situaci. Obecný důkaz nebyl vyžadován. To se změnilo s nástupem řecké matematiky, jejíž představitelé používáním deduktivní metody položili vědecké základy matematiky.

Thales z Milétu, 624?–546? př. n. l.

Zabýval se praktickým využitím geometrie, ale stál také u zrodu geometrie jako vědecké disciplíny. Při formulování geometrických vlastností uplatňoval deduktivní metodu, své závěry vyslovoval pro obecné útvary a předkládal jejich důkazy.

PŘÍKLAD 2.1 (Výpočet výšky pyramidy)**.** *Thales z Milétu prý jako první dokázal vypočítat výšku Cheopsovy pyramidy v Egyptě. Využil při tom poznatek, že v jistou denní dobu je délka jeho stínu, když stojí poblíž pyramidy, rovna jeho výšce. Jak výšku pyramidy určil?*



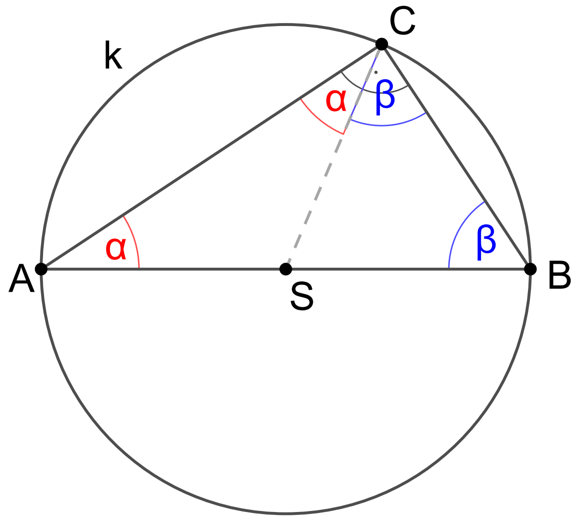
Obrázek 7: Thales měří Cheopsovu pyramidu

Thales mimo jiné formuloval a dokázal následující dvě věty, které patří do současného učiva matematiky na základní škole.

Věta 3. *Úhly při základně rovnoramenného trojúhelníku jsou si rovny.*

Věta 4 (Thaletova věta)**.** *Každý obvodový úhel nad průměrem kružnice je pravý.*

Důkaz. Myšlenka důkazu Thaletovy věty je dostatečně ilustrována následujícím obrázkem 8. □



Obrázek 8: Důkaz Thaletovy věty, $2(\alpha + \beta) = 180°$

Eukleides, kolem r. 300 př. n. l.

Svým dílem *Základy* (viz [4]), ve kterém uspořádal dosavadní poznatky z matematiky, položil skutečné základy axiomatické výstavby geometrie i celé matematiky.

Celou geometrii odvodil ze 14 axiomů[1], z nichž 5 nazval postuláty[2] (postuláty můžeme chápat jako formulace základních úloh, které lze v rovině konstruovat; Servít je nazýval „Úkoly prvotné“), [10], [14].

[1] *axiom* – základní věta, poučka, zásada, která se přijímá a bez důkazu považuje za pravdivou: log., mat. tvrzení deduktivní teorie přijaté bez důkazu; *Akademický slovník cizích slov*, Academia, Praha, 2001

[2] *postulát* – princip, požadavek nebo tvrzení určité vědecké teorie přijaté bez důkazu a tvořící její východisko: log. axiom; *Akademický slovník cizích slov*, Academia, Praha, 2001

Eukleidovy postuláty:

1. Dva dané (různé) body spojit úsečkou.
2. Danou úsečku na jedné i druhé straně libovolně prodloužit.
3. Vytvorit kružnici s daným středem a procházející daným bodem (různým od středu).
4. Všechny pravé úhly jsou shodné.
5. Dvě přímky v rovině, které protínají jinou přímku této roviny a tvoří s ní po jedné straně vnitřní úhly, jejichž součet je menší dvou pravých, se vždy protínají a to po té straně, kde je součet menší.

Poznámka. Konstrukce uskutečňované podle prvních tří Eukleidových postulátů jsou známé jako *eukleidovské konstrukce*, též konstrukce kružítkem a pravítkem (bez měřítka) (*Compass and straightedge constructions*).

Ne každou geometrickou úlohu lze řešit pomocí těchto konstrukcí, viz např. *kvadratura kruhu*, *zdvojení krychle* a *trisekce úhlu*.

Nemožnost vyřešit tyto tři úlohy pouze užitím kružítka a pravítka byla dokázána až v 19. století, po vytvoření náležitého matematického aparátu. Nemožnost eukleidovské konstrukce *zdvojení krychle* a *trisekce úhlu* dokázal *Pierre Wantzel* v roce 1837. Nemožnost eukleidovské konstrukce *kvadratury kruhu* pak vyplynula z důkazu transcendentnosti čísla π, který podal *Ferdinand von Lindemann* v roce 1882.

Soustava axiomů eukleidovské geometrie představená v Základech není vytvořena příliš důsledně a trpí některými logickými nedostatky. Nápravu učinil až *David Hilbert* (1862 - 1943) na přelomu 19. a 20. století. Svou představu, že v logicky dokonale vystaveném systému axiomu v podstatě ztrácí smysl původní význam jednotlivých použitých pojmu, vyjádřil známým výrokem:

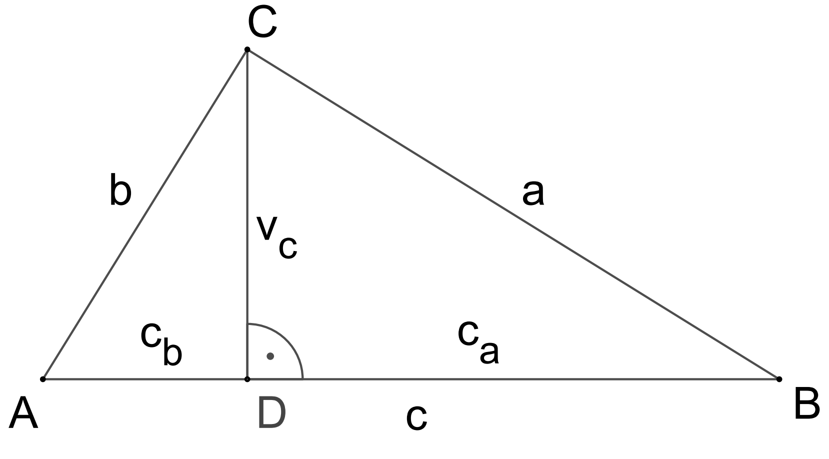
> *„Vždy musíme být schopni místo body, přímky a roviny říkat stoly, židle a půllitry.“*

Tím se otevírá cesta k různým *modelům abstraktní geometrie*, např. *Poincarého modelu* nebo *Beltramiho–Kleinovu modelu.* K otázce axiomů se zanedlouho vrátíme v souvislosti s představením tzv. neeukleidovských geometrií.

V *Základech* najdeme většinu tvrzení, o která se dosud opírá výuka planimetrie na základní a střední škole. Není to však nic špatného. Výsadou matematiky je, že její (dokázané) poznatky nestárnou a časem neztrácejí svou pravdivost.

Věta 5. *Když se v pravoúhlém trojúhelníku vede od pravého úhlu na základnu kolmice, trojúhelníky při kolmici jsou podobny celému i navzájem. (VIII., Kniha VI., viz [4] str. 88)*

Toto tvrzení vede k tzv. Eukleidovým větám (o výšce a o odvěsnách).



Obrázek 9: Eukleidovy Základy, Kniha VI., Tvrzení VIII.

Věta 6 (Euklidova věta o výšce a o odvěsně)**.** *V každém pravoúhlém trojúhelníku ABC (při označení dle Obr. 9) platí* $v^2 = c_a c_b$, $a^2 = cc_a$, $b^2 = cc_b$. *([11], str. 393)*

Jako tvrzení XLVII. v Knize I. je uvedena Pythagorova věta, jako následující tvrzení je pak uvedena věta k ní obrácená. Zde si uvedeme současné formulace těchto vět převzaté z [11], str. 393.

Věta 7 (Pythagorova věta)**.** *V každém pravoúhlém trojúhelníku ABC (při označení dle Obr. 9) platí $c^2 = a^2 + b^2$.*

Věta 8 (věta obrácená k Pythagorově větě)**.** *Jestliže v trojúhelníku ABC, jehož strany mají délky a, b, c, kde $c > a, c > b$, platí $a^2 + b^2 = c^2$, pak tento trojúhelník je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu C.*

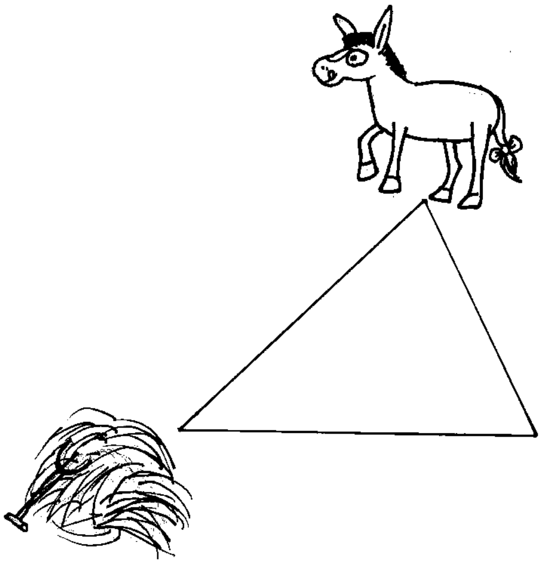
Ne každý chápal nutnost pevné logické výstavby matematické teorie založené na deduktivní metodě, kdy jsou z daných axiomů dokazovány i zdánlivé samozřejmosti. Příkladem je *trojúhelníková nerovnost*, uvedená jako tvrzení XX. v Knize I. [3] v této podobě.

Věta 9 (Trojúhelníková nerovnost (dle [3]))**.** *V každém trojúhelníku kterékoli dvě strany (součtem) jsou delší než strana zbývající.*

Texty obou českých překladů *Základů*, [4] i [3], přebírají styl textů latinských a řeckých pocházejících z 19. století, které jim byly předlohou. Dnes příslušné vlastnosti formulujeme jednodušeji. Větu o trojúhelníkové nerovnosti bychom potom vyslovili třeba takto.

Věta 10 (Trojúhelníková nerovnost)**.** *Součet dvou stran libovolného trojúhelníku je větší než strana zbývající.*

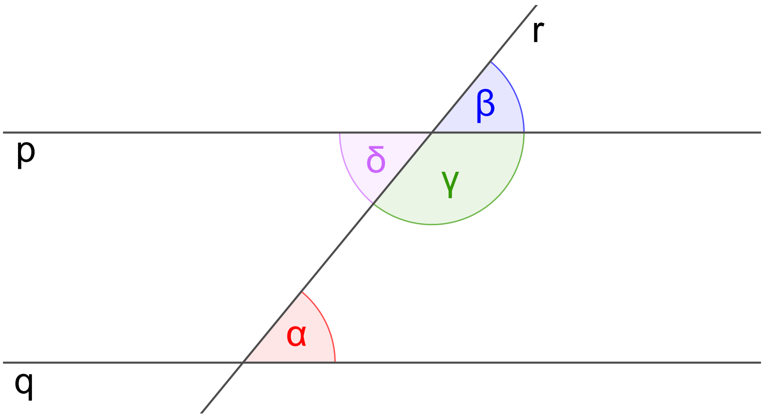
Prezentace této vlastnosti trojúhelníku formou věty, kterou je třeba dokázat, se stala předmětem kritiky ze strany Epikurejců. Ti tvrdili, že tuto vlastnost zná přece každý osel (proto se jí někdy říká „oslí věta“), když je známé, že ke kupce sena jde vždy nejkratší cestou, viz Obr. 10, a není proto nutné jí nějak zvlášť dokazovat.



Obrázek 10: Trojúhelníková nerovnost – oslí věta

Úhly souhlasné, střídavé a přilehlé

Příklady těchto dvojic úhlů jsou na Obr. 11: α, β – souhlasné, α, δ – střídavé, α, γ – přilehlé, více viz [11], str. 377–378.

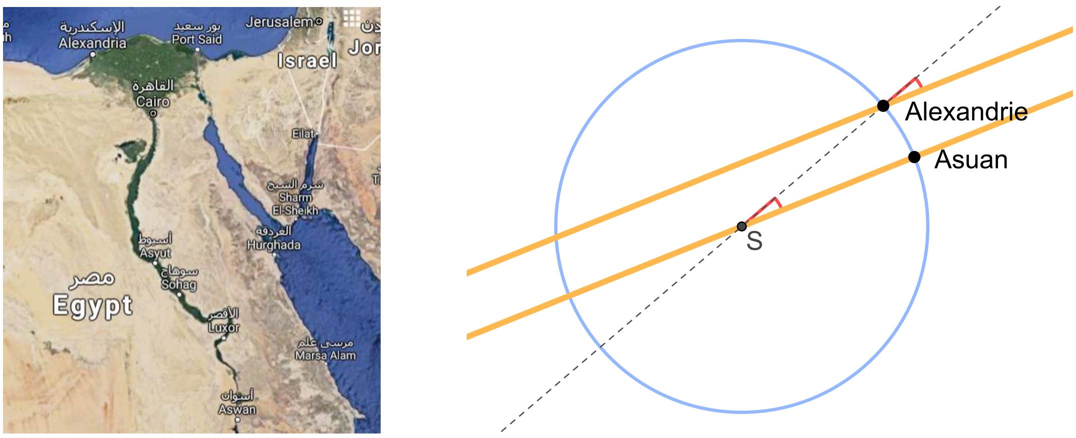


Obrázek 11: Úhly souhlasné (α, β), střídavé (α, δ) a přilehlé (α, γ)

V *Základech* (přesněji v českém překladu [3]) pojednává o těchto dvojicích úhlů pro dvě rovnoběžné přímky tvrzení XXIX. v Knize I.

Věta 11. *Úsečka protínajíc rovnoběžky tvoří střídavé úhly navzájem stejné a úhel vnější vnitřnímu protějšímu rovný (souhlasné úhly) a vnitřní na téže straně dvěma pravým rovné (přilehlé úhly).*

Shodu souhlasných úhlů pro příčku rovnoběžek využil *Eratosthenés z Kyrény* (276?–194 př. n. l.) ke změření obvodu Země[1].



Obrázek 12: Eratosthenovo měření obvodu Země

[1]Viz Obr. 12. Vzdálenost mezi Alexandrií a Asuánem je přibližně 800 km (5000 stadií), naměřený úhel 7° pak odpovídá přibližně jedné padesátině obvodu kruhu. Z těchto údajů lze snadno vypočítat přibližný obvod Země.

Nicolas Bourbaki

Pod jménem *Nicolas Bourbaki* od roku 1934 s proměnlivou intenzitou působila/působí generačně se obměňující skupina převážně francouzských matematiků. Jejich snaha o systemizaci dosavadních poznatků z vybraných oblastí matematiky pomocí přísně formálního jazyka a na základě množinového aparátu, která je sama o sobě chvályhodná, byla nevhodně vztáhnuta i na výuku matematiky. Tato tendence se projevila přílišnou formalizací učiva již od nižších ročníků základní školy.