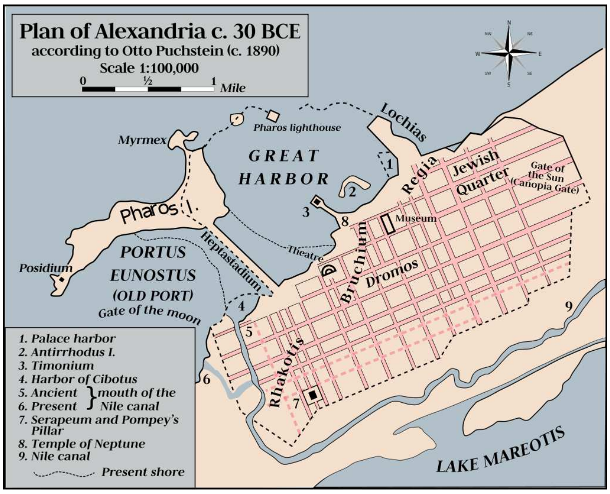
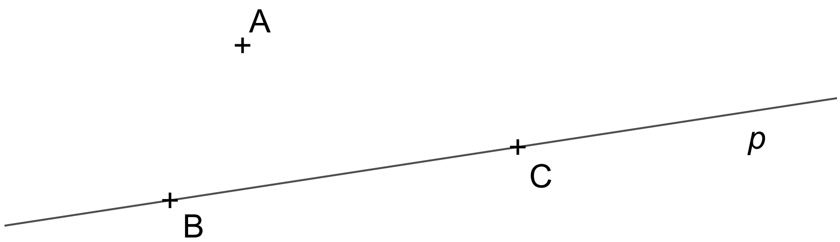
4 Geometrické útvary v rovině



Obrázek 13: Plán starověké Alexandrie, https://commons.wikimedia.org

Jestliže rovinu chápeme jako množinu bodů, potom uvažované geometrické útvary jsou jejími podmnožinami. Jedná se o abstraktní objekty, jejichž předobrazem jsou jevy a vlastnosti reálného prostoru.

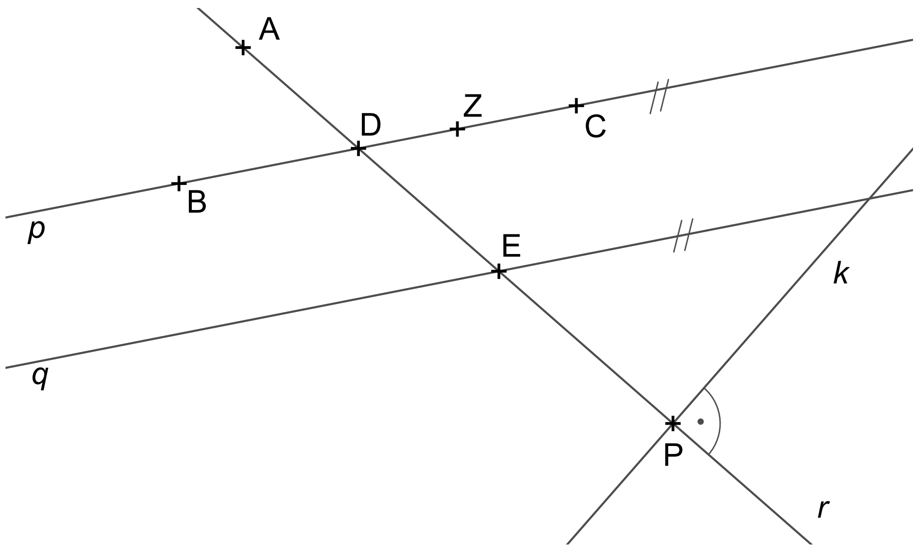
4.1 Body, přímky, polopřímky, poloroviny



Obrázek 14: Body, přímka, úsečka

Viz Obr. 14:

Přímka p je určená body B, C	$p = \leftrightarrow BC$
Bod B leží na přímce p	$B \in p$
Bod A neleží na přímce p	$A \notin p$
Úsečka s krajními body A, B	AB

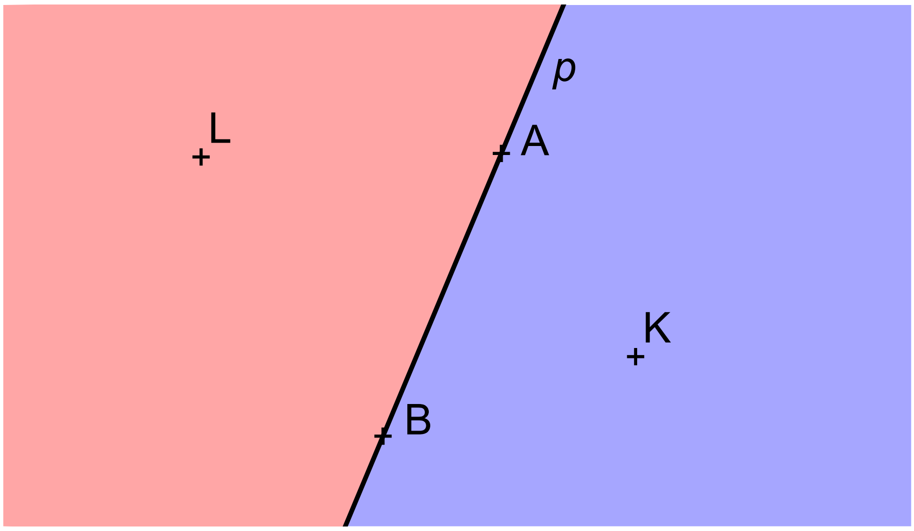


Obrázek 15: Přímky rovnoběžné a různoběžné, polopřímky

Polopřímka je část přímky určená *počátkem* a aspoň jedním *vnitřním bodem.*

Viz Obr. 15:

Přímky p, q jsou rovnoběžné (rovnoběžky)	$p \| q$
Přímky $\leftrightarrow BC$, q jsou rovnoběžné	$\leftrightarrow BC \parallel q$
Přímky p, r nejsou rovnoběžné (v rovině jsou tedy různoběžné)	$p \nparallel r$
Přímky m, n jsou splývající (totožné) (též pokládáme za rovnoběžné) (*Pozn.: Nejsou na Obr. 15*)	$m = n$
Polopřímka s počátkem D jdoucí bodem C	$\mapsto DC$
Bod Z je bodem polopřímky $\mapsto DC$	$Z \in \mapsto DC$
Opačné polopřímky se společným počátkem D	$\mapsto DC, \mapsto DB$
Bod D je průsečíkem přímek (různoběžek) p a r	$D \in p \cap r$
Přímky k, r jsou navzájem kolmé (kolmice), tj. k je kolmá (kolmice) k r a naopak, r je kolmá (kolmice) ke k	$k \perp r$ $r \perp k$
Bod P je patou kolmice kolmice k	$P \in k \cap r \wedge k \perp r$



Obrázek 16: Polorovina, opačné poloroviny

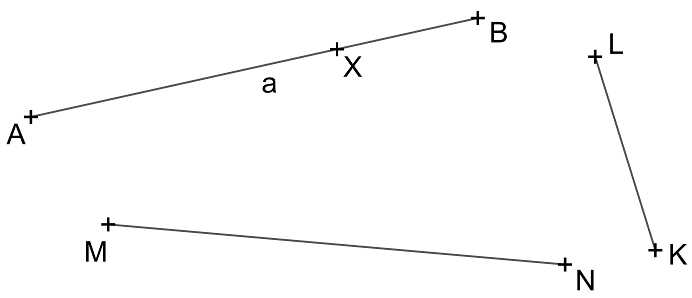
Polorovina je část roviny určená *hraniční přímkou* a aspoň jedním *vnitřním bodem*.

Viz Obr. 16:

Polorovina s hraniční přímkou $\leftrightarrow BC$ a vnitřním bodem K	$\mapsto BCK$
Polorovina s hraniční přímkou p a vnitřním bodem K	$\mapsto pK$
Hraniční přímka p náleží polorovině $\mapsto pK$ (tj. je její podmnožinou)	$p \subset \mapsto pK$
Body A, K leží v polorovině $\mapsto pK$ (přitom A je bodem její hraniční přímky, K je její vnitřní bod)	$A \in \mapsto pK$ $K \in \mapsto pK$
Opačné poloroviny se společnou hraniční přímkou p, jedna s vnitřním bodem K, druhá s vnitřním bodem L	$\mapsto pK$ $\mapsto pL$

4.2 Úsečky

Úsečka je část přímky ohraničená dvěma body (*krajní body*). Též můžeme říci, že je to přímá spojnice těchto dvou bodů.



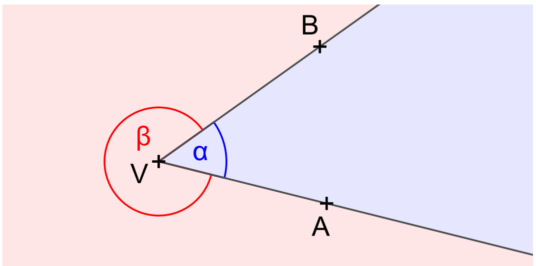
Obrázek 17: Úsečka AB

Viz Obr. 17:

Úsečka s krajními body A, B	AB nebo BA
Úsečka a s krajními body A, B	$a = AB$
Bod X je vnitřním bodem úsečky a	$X \in a$ nebo $X \in AB$
Délka úsečky AB	$\|AB\|$
Usečky AB a MN mají stejné délky	$\|AB\| = \|MN\|$
Usečky AB a KL nemají stejné délky	$\|AB\| \neq \|KL\|$

4.3 Úhly

Úhel je část roviny ohraničená dvěma polopřímkami (*ramena úhlu*) se společným počátkem (*vrchol úhlu*).

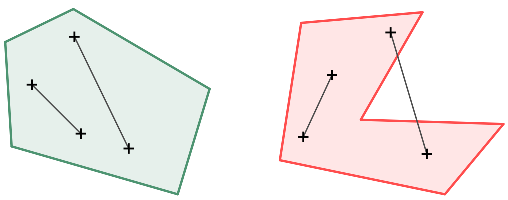


Obrázek 18: Úhly α, β; α je konvexní, β je nekonvexní

Dvě ramena spolu s vrcholem tvoří dva úhly, viz Obr. 18. Potřebujeme-li je rozlišit, použijeme přívlastky *konvexní*, *nekonvexní*, pokud nejsou oba úhly *přímé* (místo pojmu *nekonvexní úhel* se někdy používá též označení *dutý úhel* nebo *konkávní úhel*).

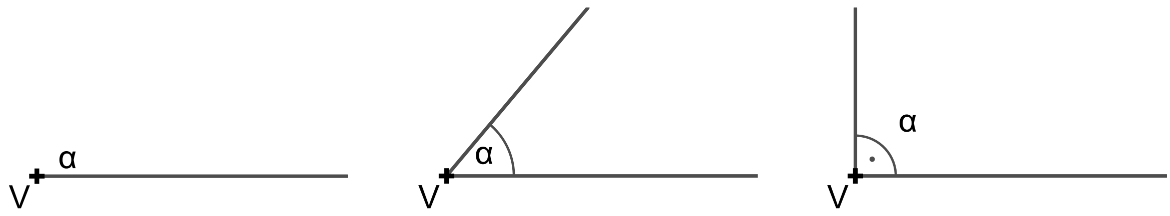
Další možností je uvažovat dané úhly jako orientované (tj. rozlišovat u nich mezi *prvním* a *druhým* ramenem) a zadat je v témže smyslu (*kladném*, proti směru pohybu hodinových ručiček, nebo *záporném*, po směru pohybu hodinových ručiček). Zadání úhlů z Obr. 18 v kladném smyslu by potom vypadala takto: $\alpha = \sphericalangle AVB$, $\beta = \sphericalangle BVA$.

Poznámka (*Konvexní* a *nekonvexní* (*konkávní*) útvar)**.** Útvar (množina bodů) je *konvexní*, jestliže pro každé dva jeho body je úsečka, která je spojuje, jeho podmnožinou, viz Obr. 19, vlevo. *Nekonvexní*, též *konkávní*,

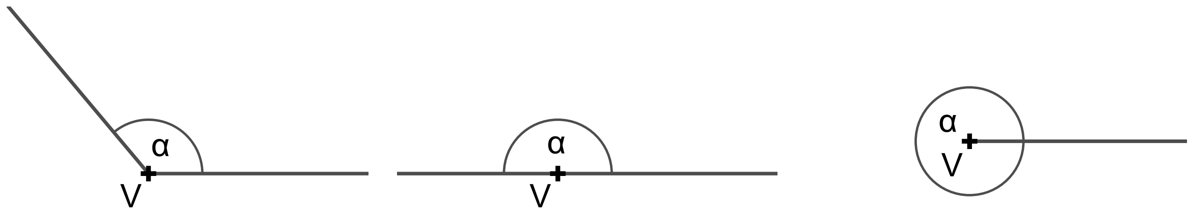


Obrázek 19: Konvexní útvar (vlevo) a nekonvexní, též konkávní, útvar (vpravo)

je potom útvar, v němž se nacházejí takové body, že jejich spojnice není jeho podmnožinou, tj. nenáleží mu celá, viz Obr. 19, vpravo.



Obrázek 20: Úhel α: nulový ($\alpha = 0°$), ostrý ($0° < \alpha < 90°$), pravý ($\alpha = 90°$)



Obrázek 21: Úhel α: tupý ($90° < \alpha < 180°$), přímý ($\alpha = 180°$), plný ($\alpha = 360°$)

Na obrázcích 20 a 21 jsou postupně zobrazeny tyto úhly: *nulový*, *ostrý*, *pravý*, *tupý*, *přímý* a *pravý*.

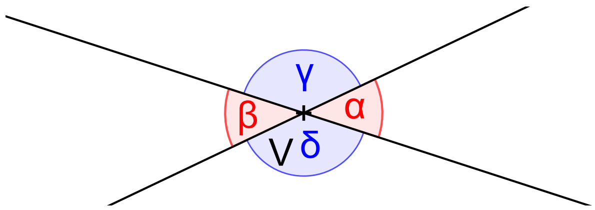
PŘÍKLAD 4.1. *Rozhodněte, které z úhlů na obrázcích 20 a 21 jsou konvexní a které jsou nekonvexní.*

Dva úhly, které mají stejnou velikost, nazýváme *shodné úhly*.

Úhly $\sphericalangle AVB$ a $\sphericalangle MUN$ mají stejnou velikost	$\lvert\sphericalangle AVB\rvert = \lvert\sphericalangle MUN\rvert$
Úhly α a β mají stejnou velikost	$\alpha = \beta$
Úhly $\sphericalangle AVB$ a $\sphericalangle MUN$ jsou shodné	$\sphericalangle AVB \cong \sphericalangle MUN$
Úhly α a β jsou shodné	$\alpha \cong \beta$

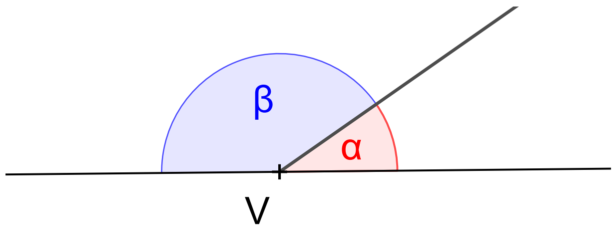
Dvojice úhlů

Dvojice shodných úhlů se společným vrcholem, jejichž ramena jsou opačné polopřímky, nazýváme *vrcholové úhly*. Na Obr. 22 jsou dvě dvojice vrcholových úhlů: α, β a γ, δ.



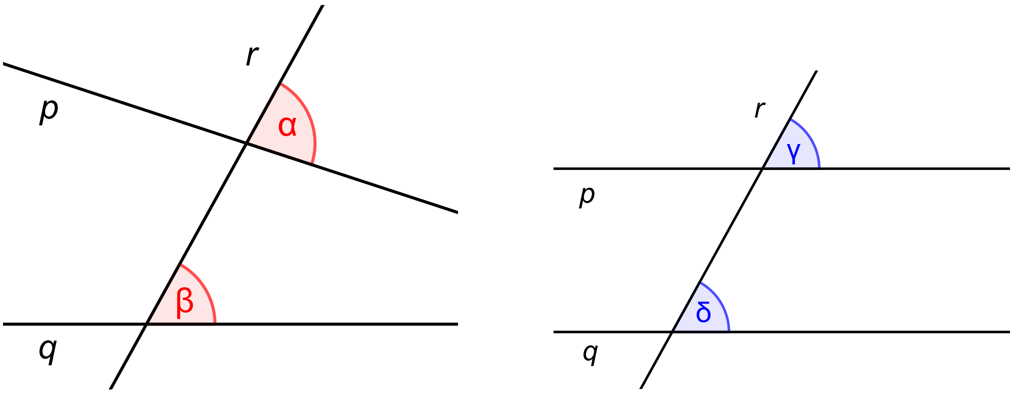
Obrázek 22: Vrcholové úhly α, β, resp. γ, δ

Dvojice konvexních úhlů, které mají jedno rameno společné a jejichž zbývající ramena jsou opačné polopřímky, nazýváme *vedlejší úhly*. Na Obr. **??** je dvojice vedlejších úhlů α, β. Je zřejmé, že součtem vedlejších úhlů je přímý úhel, tj. $\alpha + \beta = 180°$.

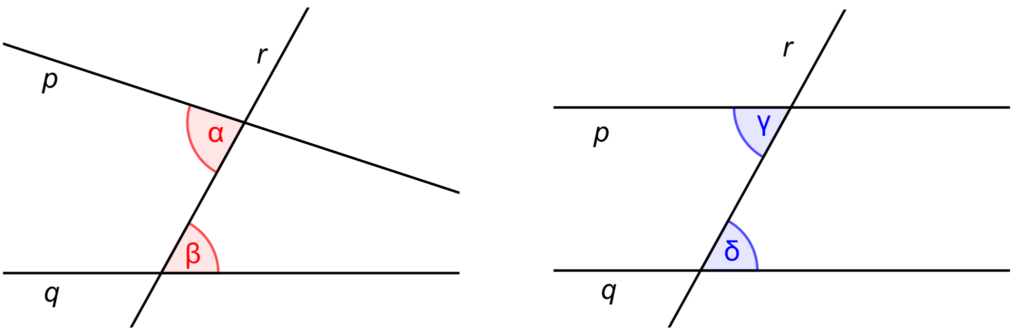


Obrázek 23: Vedlejší úhly α, β; $\alpha + \beta = 180°$

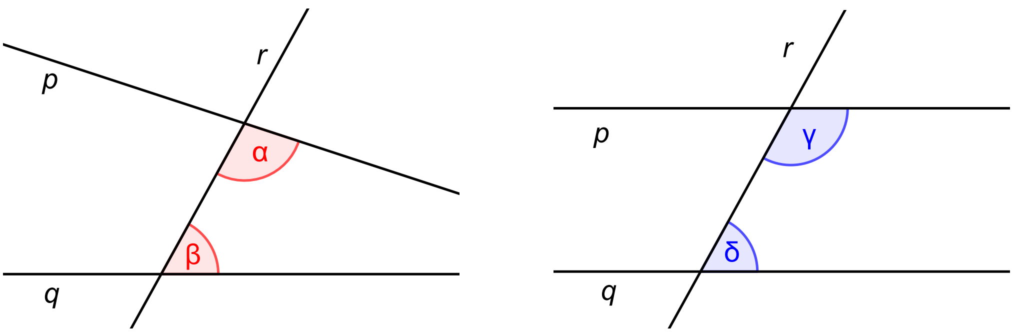
Pokud dvě přímky (p, q, viz Obr. 24, 25, 26) protneme třetí přímkou (r, viz Obr. 24, 25, 26), vznikají tři dvojice úhlů: ***úhly souhlasné***, ***úhly střídavé*** a ***úhly přilehlé***. Pokud jsou ony dvě přímky p, q rovnoběžné (viz Obr. 24, 25, 26, vždy vpravo), jsou úhly souhlasné stejně jako střídavé shodné, zatímco součet úhlů přilehlých je 180° (viz též Obr. 11 na str. 14)



Obrázek 24: Souhlasné úhly; $\alpha \neq \beta$, ale $\gamma = \delta$



Obrázek 25: Střídavé úhly; $\alpha \neq \beta$, ale $\gamma = \delta$



Obrázek 26: Přilehlé úhly; $\alpha + \beta \neq 180°$, ale $\gamma + \delta = 180°$

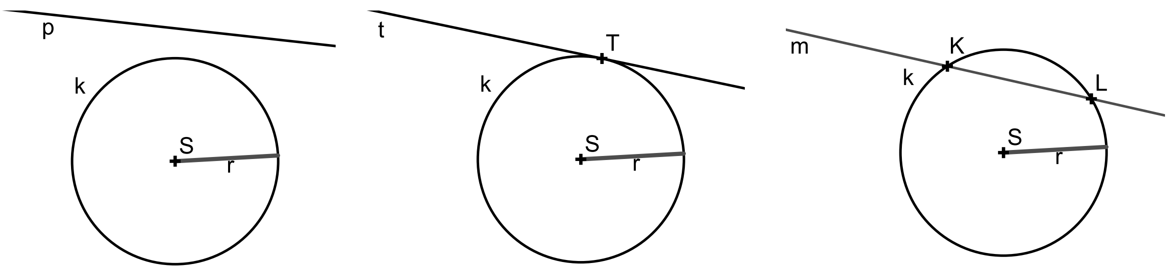
4.4 Kružnice

Obrázek 27: Centrální zavlažování polí, Kansas, USA (Google Maps)

Kružnice k se středem S a poloměrem r je množina všech bodů v rovině, jejichž vzdálenost od S je rovna r, značíme $k(S, r)$.

Kruh K se středem S a poloměrem r je množina všech bodů v rovině, jejichž vzdálenost od S je menší nebo rovna r, značíme $K(S, r)$.

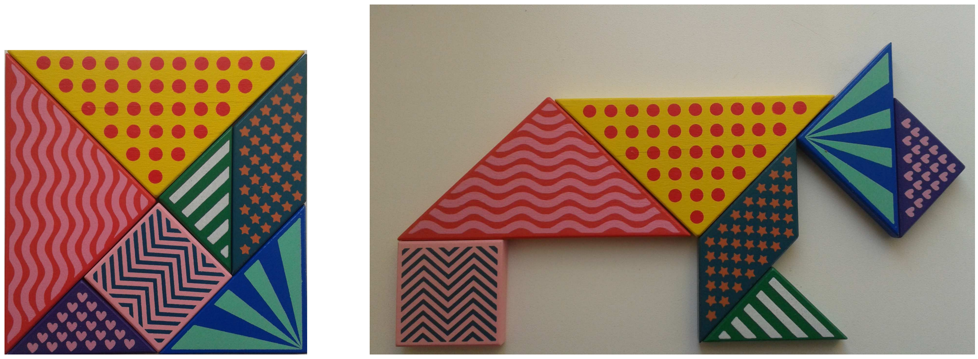
Rozlišujeme tři případy vzájemné polohy přímky a kružnice: *vnější přímka kružnice* (viz Obr. 28, vlevo), *tečna kružnice* (viz Obr. 28, uprostřed; tečna t s *bodem dotyku* T), *sečna kružnice*



Obrázek 28: Vzájemná poloha přímky a kružnice

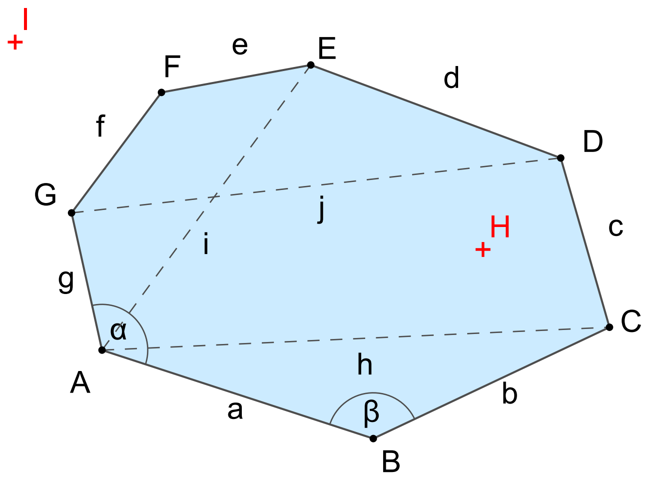
Úsečku spojující dva různé body kružnice nazýváme *tětiva kružnice*. Na Obr. 28, vpravo, je tětiva KL, která je částí sečny m, tj. $KL \subset m$.

4.5 Mnohoúhelníky



Obrázek 29: Tangram

Mnohoúhelník můžeme charakterizovat jako část roviny ohraničenou uzavřenou lomenou čarou (tj. čarou, která se skládá z na sebe navazujících úseček). Již víme, že rozlišujeme *konvexní* a *nekonvexní* mnohoúhelníky, viz str. 22.



Obrázek 30: Mnohoúhelník, konkrétně konvexní 7-úhelník

Mnohoúhelník s n vrcholy nazýváme $n-$úhelník. Rozlišujeme u něj *vrcholy* (viz Obr. 30, body A, B, C, D, E, F, G), *strany* (a, b, c, d, e, f, g), *vnitřní* a *vnější body* (viz např body H, I, v daném pořadí), *úhlopříčky* (viz např. h, i, j) a *vnitřní úhly* (viz např. α, β).

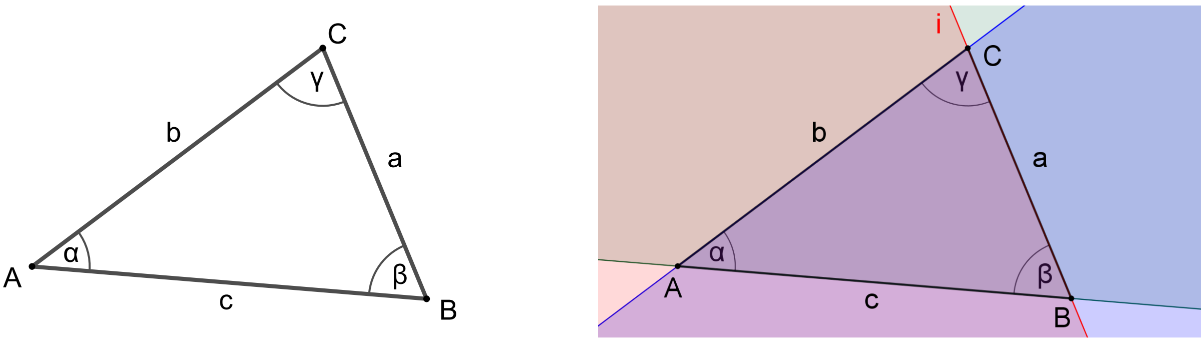
PŘÍKLAD 4.2. *Kolik úhlopříček má $n-$úhelník? Vyřešte nejprve pro $n = 5$, potom hledejte obecný vztah.*

Poznámka. Nezapomínejme na to, že pojmem *mnohoúhelník* rozumíme rovinný útvar, jehož vrcholy (strany) leží v jedné rovině. To samozřejmě platí i pro speciální mnohoúhelníky, jako je čtverec, obdélník, pravidelný $n-$úhelník apod. Pokud neleží všechny vrcholy $n-$úhelníku v rovině, hovoříme o *prostorovém $n-$úhelníku*, viz Obr. 31.

Obrázek 31: Prostorové čtyřúhelníky tvoří základ systému zastřešení autobusového nádraží v Českých Budějovicích (plochy, které je vyplňují se nazývají *hyperbolické paraboloidy*). (*Fotografie byla pořízena s laskavým svolením Správy Mercury centra*)

4.6 Trojúhelník

Trojúhelník je mnohoúhelník se třemi vrcholy. Patří do něj i vnitřní body. Definujeme ho tedy jako průnik tří polorovin, na Obr. 32, kde vidíme trojúhelník ABC, se jedná o poloroviny $\mapsto ABC, \mapsto CAB, \mapsto BCA$. Všimněme si, že u trojúhelníku, ne rozdíl od obecného mnohoúhelníku na

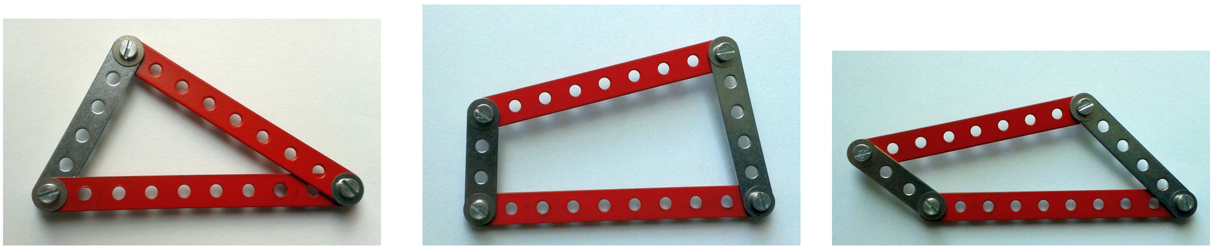


Obrázek 32: Trojúhelník ABC a jeho vznik průnikem tří polorovin

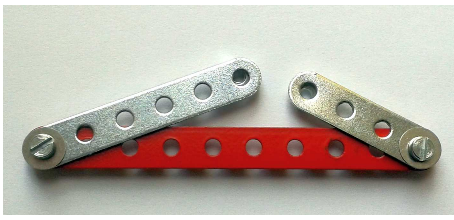
Obr. 30, značíme strany podle *protilehlého vrcholu*.

Pokud není trojúhelník *zdegenerován* do úsečky, jeho vrcholy neleží v jedné přímce. O takových bodech říkáme, že jsou *nekolineární*. Naopak, body (nemusí být tři, může jich být více) ležící v jedné přímce nazýváme *kolineární* body. Obdobně se setkáme s pojmem *komplanární*, pro body ležící v jedné rovině.

Trojúhelník je mezi obecnými mnohoúhelníky unikátní tím, že je jednoznačně určen svými stranami (známe jeho konstrukci podle věty *sss*[1]). Pro ostatní mnohoúhelníky, pokud ovšem nepočítáme speciální typy jako je čtverec, obdélník, lichoběžník a pravidelný n-úhelník, toto neplatí, viz Obr. 33.



Obrázek 33: Na rozdíl např. od čtyřúhelníku je trojúhelník jednoznačně určen svými stranami



Obrázek 34: Součet dvou stran trojúhelníku musí být větší než strana třetí (*trojúhelníková nerovnost*

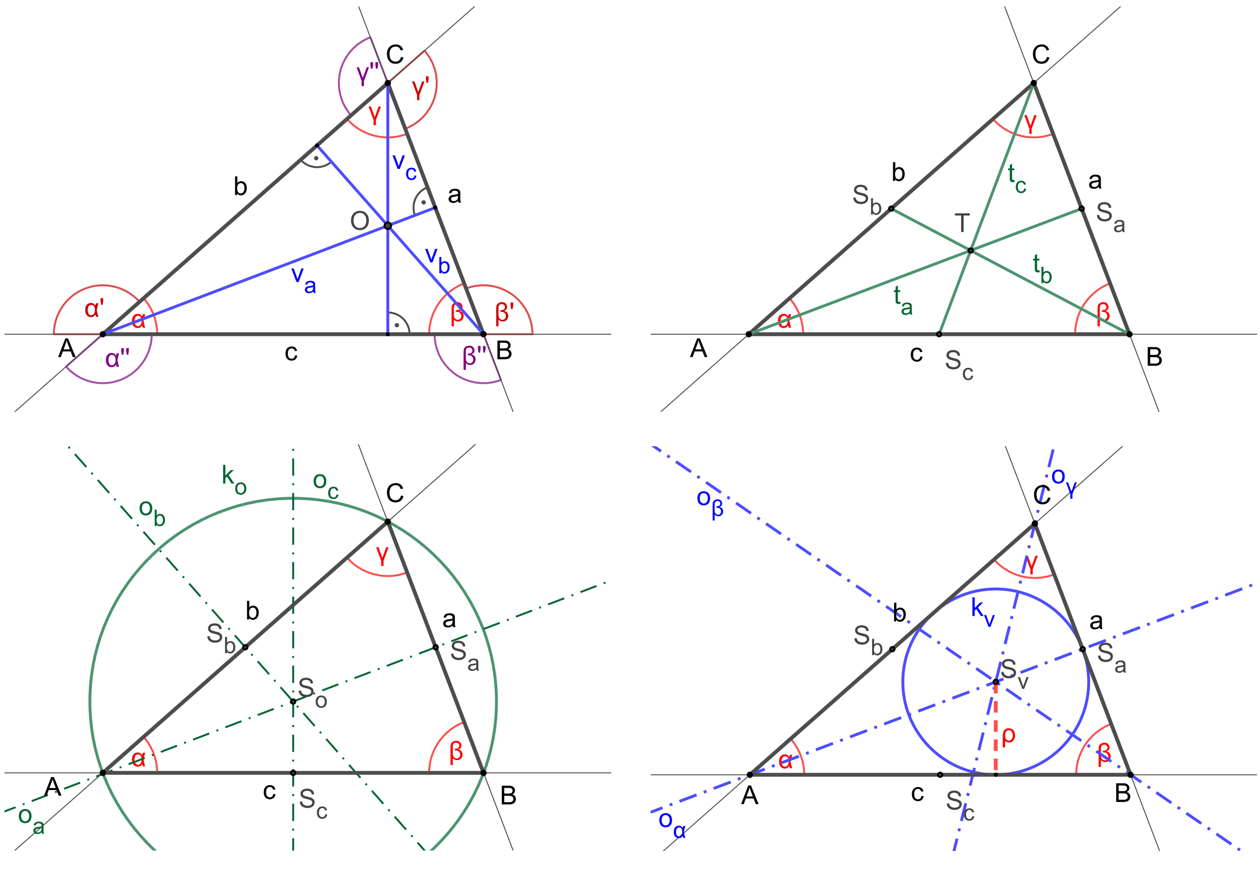
Aby tři úsečky mohly být stranami trojúhelníku, musí splňovat *trojúhelníkovou nerovnost*, viz Obr. 34. Tato základní vlastnost trojúhelníku je zmíněna jako věta 10 na str. 13.

Podle délek stran trojúhelníku rozlišujeme zvláštní typy trojúhelníků, jako jsou *rovnostranné*, *rovnoramenné* nebo *pravoúhlé* (jestliže délky stran

[1]Věta *sss* patří mezi věty o shodnosti trojúhelníků, říká: *Shodují-li se dva trojúhelníky ve všech třech stranách, jsou shodné*. Dalšími větami o shodnosti trojúhelníků jsou: *sus*, *usu* a *Ssu*.

trojúhelníku splňují obrácenou větu k Pythagorově větě, viz věty 7 a 8 na str. 13, je to trojúhelník pravoúhlý).

U libovolného trojúhelníku bychom měli umět rozeznat i sestrojit tyto prvky (viz Obr. 35): *výšky* (v_a, v_b, v_c), *těžnice* (t_a, t_b, t_c), *osy stran* (o_a, o_b, o_c), *osy úhlů* ($o_\alpha, o_\beta, o_\gamma$), *ortocentrum (průsečík výšek)* (O), *těžiště* (T), *kružnice opsaná* (k_o), *kružnice vepsaná* (k_v, *vnitřní úhly* (α, β, γ), *vnější úhly* (α', β', γ' a $\alpha'', \beta'', \gamma''$).

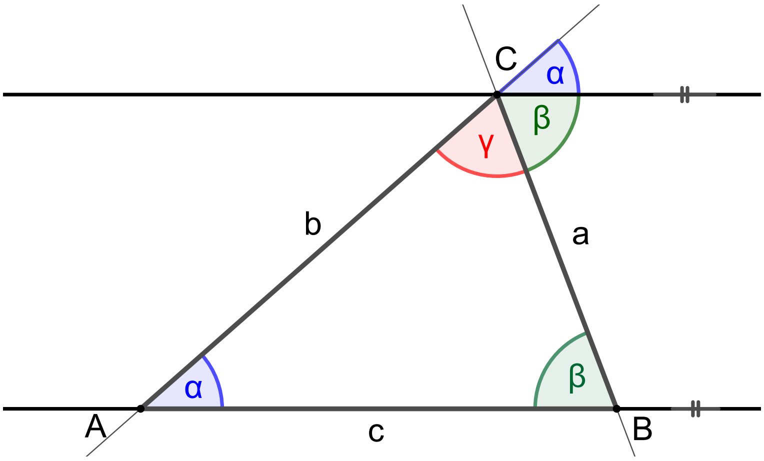


Obrázek 35: Prvky trojúhelníku ABC

Součet velikostí vnitřních úhlů trojúhelníku je 180°, tj. pro trojúhelník ABC na Obr. 35 platí

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°.$$

Jednoduchý vizuální důkaz tohoto tvrzení, založený na rovnostech dvojice úhlů souhlasných a dvojice úhlů opačných pro rovnoběžné přímky, viz str. 25, je uveden na Obr. 36.



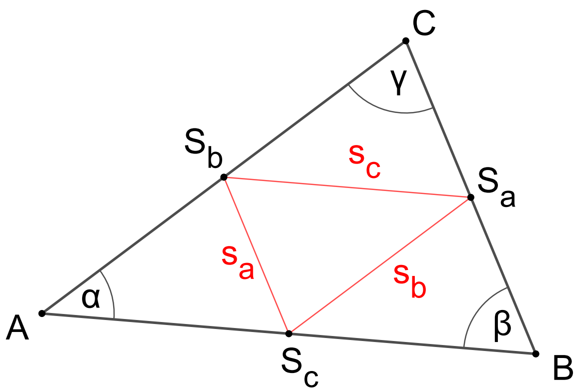
Obrázek 36: Součet velikostí vnitřních úhlů trojúhelníku je 180°

Podle velikostí vnitřních úhlů rozlišujeme trojúhelníky *ostroúhlé*, *pravoúhlé* a *tupoúhlé*, klasifikace úhlů viz str. 23.

PŘÍKLAD 4.3. *Kolik ostrých, tupých či pravých vnitřních úhlů může mít trojúhelník?*

PŘÍKLAD 4.4. *Jaký je vztah mezi vnějším úhlem trojúhelníku (např. α' na Obr. 35) a jemu protilehlými vnitřními úhly (pro vnější úhel α' na Obr. 35 to jsou úhly β a γ)?*

Úsečku, jejíž krajní body jsou středy dvou stran trojúhelníku nazýváme *střední příčka*. V trojúhelníku lze sestrojit tři střední příčky, viz s_a, s_b, s_c na Obr. 37. Platí pro ně následující věta.



Obrázek 37: Střední příčky s_a, s_b, s_c trojúhelníku ABC

Věta 12 (Střední příčky trojúhelníku). *Každá střední příčka trojúhelníku je rovnoběžná s jednou z jeho stran (s níž nemá společný bod) a její délka je rovna polovině délky této strany.*

PŘÍKLAD 4.5. *Střední příčky rozdělují trojúhelník (viz např. ΔABC na Obr. 37) na čtyři menší trojúhelníky. Jaký je vztah těchto trojúhelníků mezi sebou a k ΔABC? Odpověď vám pomohou nalézt známé vztahy mezi úhly souhlasnými, resp. střídavými. Pokuste se zjištěné skutečnosti využít k důkazu věty 12.*

Eukleidovské konstrukce trojúhelníku

Uvažujeme-li tyto prvky trojúhelníku: *strany* (a, b, c), *vnitřní úhly* (α, β, γ), *výšky* (v_a, v_b, v_c), *těžnice* (t_a, t_b, t_c), *osy vnitřních úhlů* $(o_\alpha, o_\beta, o_\gamma)$, *poloměr kružnice opsané* (r), *poloměr kružnice vepsané* (ρ), existuje 150 možností, jak třemi z nich trojúhelník ABC zadat, např. $[a, b, c]$; $[a, \alpha, v_a]$; $[o_\alpha, o_\beta, o_\gamma]$; $[\alpha, v_b, t_c]$ apod. Přitom 98 z nich lze sestrojit eukleidovsky (užitím kružítka a pravítka), zbylých 52 nikoliv. Přehled řešení všech 98 úloh najde zájemce v publikaci [12]. Zkuste si některou z nich sestrojit, třeba tu následující, zadanou v příkladu 4.6.

PŘÍKLAD 4.6. *Sestrojte trojúhelník ABC, jsou-li dány jeho těžnice t_a, t_b, t_c.*

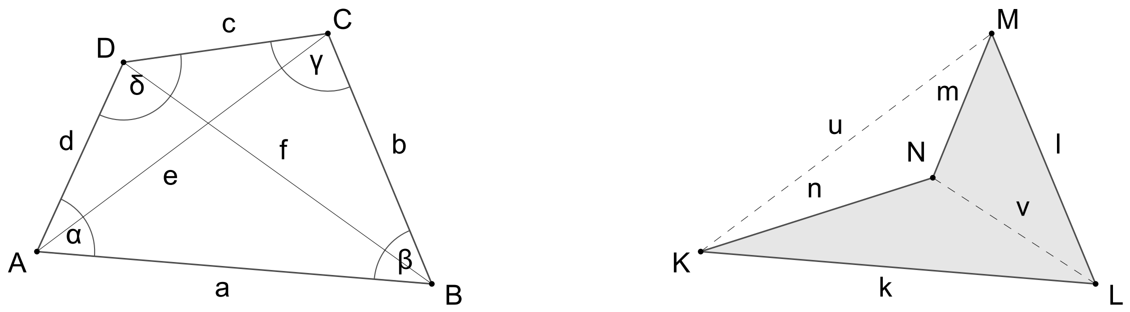
4.7 Čtyřúhelníky

Čtyřúhelník je mnohoúhelník se čtyřmi vrcholy. Dále se budeme zabývat pouze konvexními čtyřúhelníky, jako je čtyřúhelník $ABCD$ na Obr. 38.

Součet velikostí vnitřních úhlů čtyřúhelníku je 360°. Tj. pro čtyřúhelník $ABCD$ na Obr. 38 platí

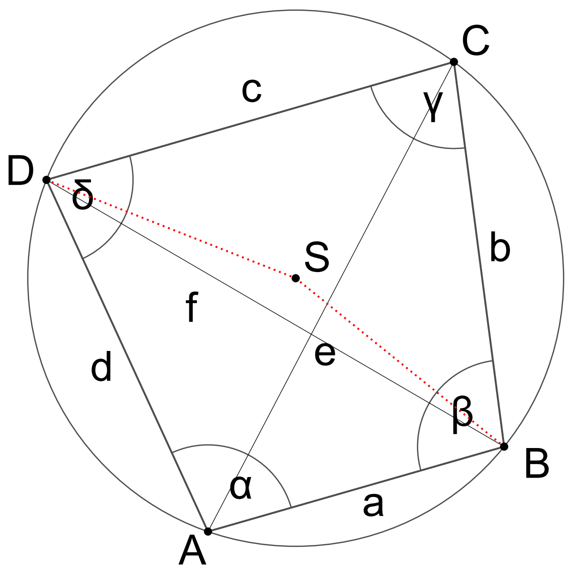
$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ.$$

PŘÍKLAD 4.7. *Dokažte výše uvedené tvrzení, že součet velikostí vnitřních úhlů čtyřúhelníku je 360°.*



Obrázek 38: Čtyřúhelník konvexní $ABCD$ a nekonvexní $KLMN$

Čtyřúhelníky, kterým lze opsat kružnici nazýváme *tětivové čtyřúhelníky*, viz Obr. 39. Jejich unikátní vlastností je, že součet protilehlých úhlů je 180°. Pokuste se tuto vlastnost dokázat.

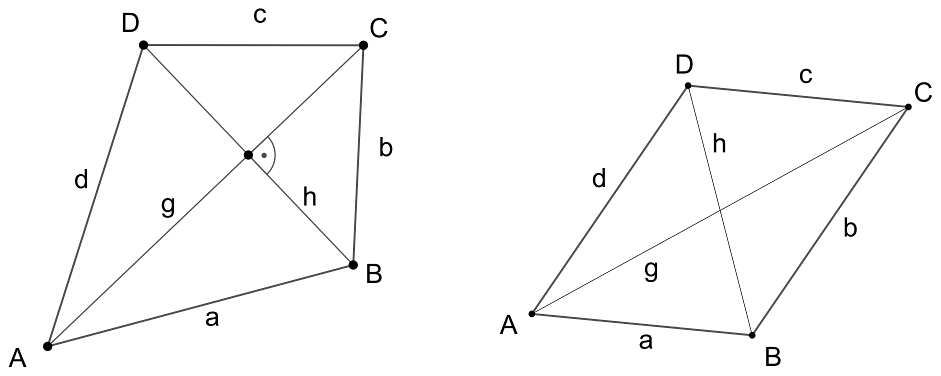


Obrázek 39: Tětivový čyřúhelník $ABCD$; $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$

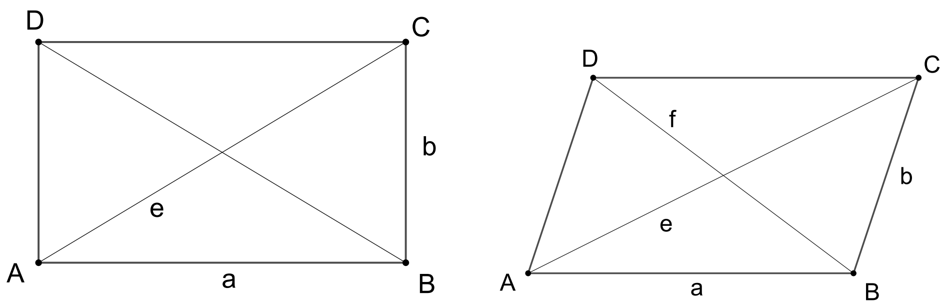
Čtyřúhelník, který je osově souměrný podle jedné z úhlopříček, nazýváme *deltoid*. Je zřejmé, že má úhlopříčky vzájemně kolmé a jeho strany jsou po dvojicích shodné.

Dalšími speciálními typy čtyřúhelníků jsou *obdélník* (protější strany shodné, sousední strany různé, všechny úhly pravé), *čtverec* (všechny strany shodné a sousední vždy vzájemně kolmé) a *lichoběžník* (dvě protilehlé strany rovnoběžné, nazýváme je *základny*, zbývající dvě strany různoběžné, nazýváme je *ramena*). Pokud jsou ramena lichoběžníku shodná, nazýváme ho *rovnoramenný* lichoběžník.

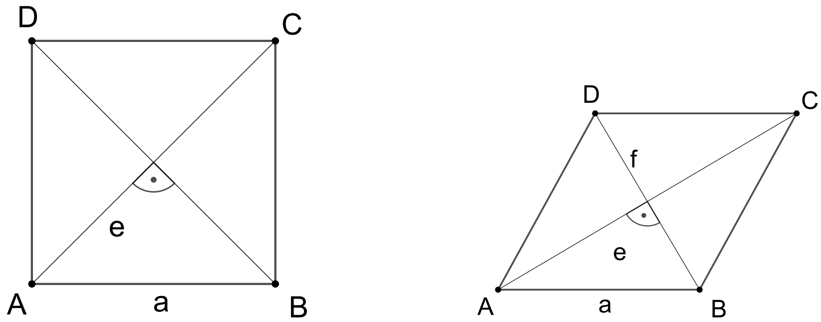
Čtyřúhelník, jehož protější strany jsou navzájem rovnoběžné, nazýváme *rovnoběžník*. Protější strany rovnoběžníku jsou stejně dlouhé. Rovnoběžníky, jejichž sousední strany nejsou k sobě kolmé, můžeme rozdělit na *kosodélníky* a *kosočtverce*. Pokud jsou sousední strany rovnoběžníku k sobě kolmé, jedná se o *obdélník* (sousední strany mají různé délky) nebo *čtverec* (všechny strany jsou stejně dlouhé).



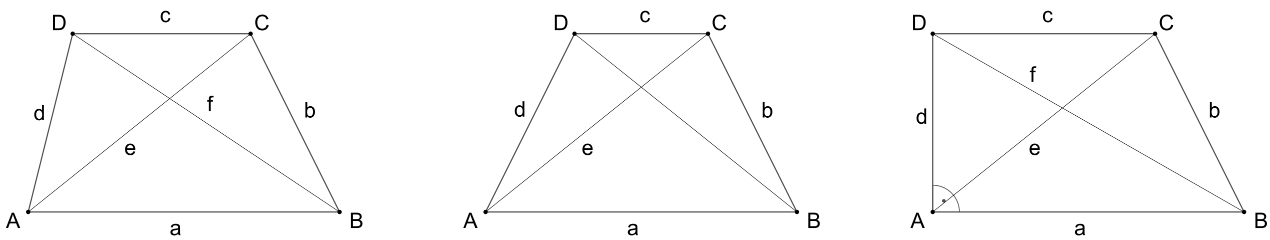
Obrázek 40: Deltoid (vlevo) a rovnoběžník (vpravo)



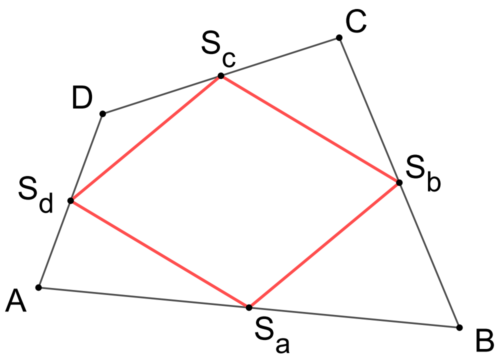
Obrázek 41: Obdélník (vlevo) a kosodélník (vpravo)



Obrázek 42: Čtverec (vlevo) a kosočtverec (vpravo)



Obrázek 43: Lichoběžník (vlevo), rovnoramenný lichoběžník (uprostřed) a pravoúhlý lichoběžník (vpravo)



Obrázek 44: Varignonova věta

Pro libovolný čtyřúhelník platí následující věta pojmenovaná po francouzském matematikovi Pierru Varignonovi (1654-1722).

Věta 13 (Varignonova věta)**.** *Středy stran libovolného čtyřúhelníku tvoří rovnoběžník (jehož stranami jsou střední příčky rovnoběžníku), viz Obr. 44.*

PŘÍKLAD 4.8. *Pokuste se větu 13 dokázat. Využijte při tom větu 12 o středních příčkách trojúhelníku.*

4.8 Pravidelné mnohoúhelníky ($n-$úhelníky)

Obrázek 45: Jednoduchá dlažba – pravidelné šestiúhelníky

Pravidelným mnohoúhelníkem (též *pravidelným $n-$úhelníkem*) rozumíme mnohoúhelník, který má všechny strany a všechny úhly shodné. Pravidelnému mnohoúhelníku lze opsat i vepsat kružnici. Tyto kružnice jsou soustředné a jejich střed nazýváme *středem (pravidelného) mnohoúhelníku.*

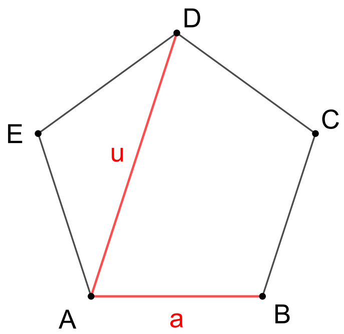
PŘÍKLAD 4.9. *Pravidelný $n-$úhelník má všechny vnitřní úhly stejně velké. Jak závisí jejich velikost na n, tj. na počtu vrcholů $n-$úhelníku? Odvoďte obecný vztah vyjadřující závislost vnitřního úhlu α na n.*

Na Obr. 45 vidíme dlažbu z pravidelných šestiúhelníků. Vidíme, že tyto dlaždice lze uspořádat tak, aby souvisle pokryly celou rovinu (Proč?). Nabízí se tak otázka, jakými pravidelnými $n-$úhelníky jednoho druhu můžeme takto pokrýt rovinu. Odpovědí je, že to jde těmito $n-$úhelníky: *rovnostranným trojúhelníkem*, *čtvercem* a *pravidelným šestiúhelníkem.* Proč to nejde pro jiné pravidelné $n-$úhelníky? Pro pravidelný pětiúhelník vidíme odpověď na Obr. 46.

Zlatý řez v pravidelném pětiúhelníku

Poměr délky úhlopříčky u a strany a pravidelného pětiúhelníku je roven $\frac{u}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$, viz Obr. 47. Tento poměr, který se tradičně označuje

Obrázek 46: Kombinovaná dlažba – pravidelné pětiúhelníky a kosočtverce



$$\frac{u}{a} = \frac{3.2360679775}{2} = 1.6180339887$$

Obrázek 47: Zlatý řez v pravidelném pětiúhelníku

písmenem ϕ, nazýváme *zlatý řez*. Pro svoji estetickou působivost je poměr zlatého řezu také označován jako „poměr oku lahodící“. Pro jeho slovní definici si představme úsečku délky $x+y$, kterou rozdělíme na dvě nestejné části, větší x a menší y. Úsečka je jimi rozdělena v poměru zlatého řezu ϕ, jestliže poměr větší z nich ku menší je roven poměru celé úsečky ku větší části, tj. $\dfrac{x}{y} = \dfrac{x+y}{x}$. Po úpravě dostaneme $\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} - 1 = 0$, odkud vychází $\frac{x}{y} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.